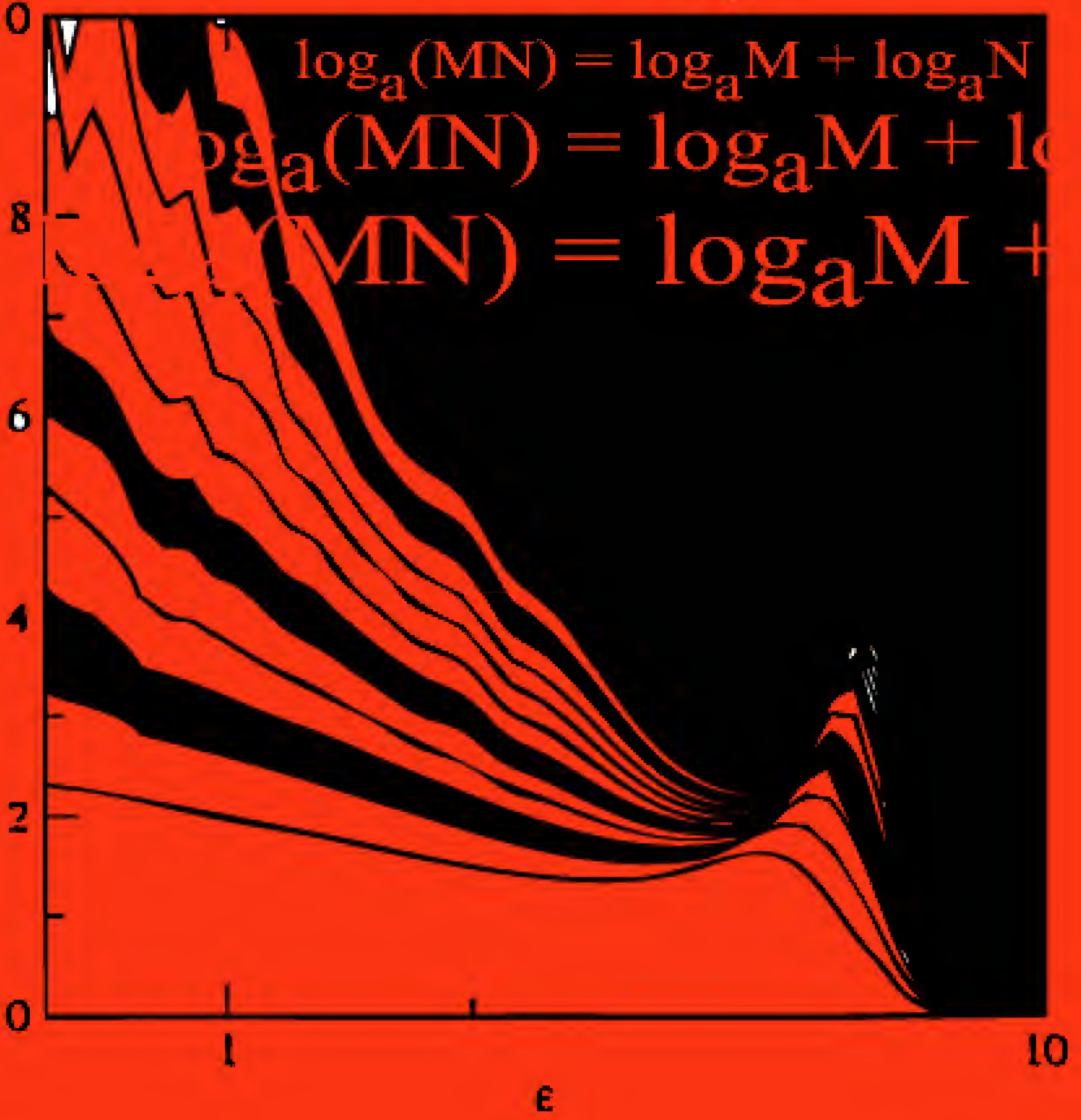
মাধ্যমিক বীজগণিত

নবম-দশম শ্রেণী



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ১৯৯৬ শিক্ষাবর্ষ
থেকে নবম–দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

মাধ্যমিক বীজগণিত

নবম–দশম শ্রেণী

রচনা

খান কলিমুল্লাহ

সম্পাদনা

ড. মুনিবুর রহমান চৌধুরী

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০
কর্তৃক প্রকাশিত।

প্রথম মুদ্রণ : জানুয়ারি, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০
পরিমার্জিত সংস্করণ : ২০০৮
পুনর্মুদ্রণ :

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড
৯৫৬২৮৬৫, ৯৫৬৭৬০৮

প্রচ্ছদ
সেলিম আহ্‌মেদ

চিত্রাঙ্কন
নাসির বিশ্বাস

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

মুদ্রণে :

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এই পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষাবিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায় এতে করে পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক–শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের বিভিন্ন সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায়শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে কোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

গণিতশিক্ষাকে যুগোপযোগী করার অভিপ্রায়ে এবং আধুনিক শিখনচাহিদা অনুযায়ী গণিতশিক্ষার মান আন্তর্জাতিক তুল্যমানে উন্নীত করে আত্মকর্মসংস্থানের সহায়ক করার লক্ষ্যে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের গণিত শিক্ষাক্রমের পরিমার্জন ও নবায়ন করা হয় এবং শিক্ষার্থীদের মাঝে মূল্যবোধ সৃষ্টির লক্ষ্যে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তুতে এর প্রতিফলন ঘটানো হয়েছে। প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য পাটিগণিতের পাঠ অষ্টম শ্রেণীর মধ্যে সীমাবদ্ধ রেখে বীজগণিতের ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। এ প্রেক্ষিতে বীজগণিতের আনুষ্ঠানিক পাঠ ষষ্ঠ শ্রেণীতে আরম্ভ করা হয়েছে এবং পাটিগণিতের সমস্যা বীজগণিতের সাহায্যে সমাধানের চেষ্টা করা হয়েছে। এ পাঠ্যপুস্তকের যেখানে প্রযোজ্য সেখানে পাটিগণিতীয় জীবনভিত্তিক সমস্যা উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা গাণিতিক অনেক সমস্যাই বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সহজে সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবে বলে আশা করা যায়। গণিত কোনো মুখস্থ বিদ্যা নয়, এটি চর্চার বিষয়। কাজেই শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে পাঠ্যপুস্তকে যে সকল অনুশীলনী ছিল তা যথাযথভাবে রয়েছে এবং প্রতিটি অধ্যায়শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মোঃ মোস্তফা কামালউদ্দিন
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

সেট

আধুনিক গণিতের হাতিয়ার হিসেবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪–১৯১৮) সেট সম্বন্ধে প্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন। তিনি অসীম সেটের যে ধারণা প্রদান করেন তা গণিত শাস্ত্রে বিপুল আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয়, তা সেট তত্ত্ব (Set Theory) হিসেবে পরিচিত।

সেট : দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুর সংগ্রহ বা দল বা গুচ্ছ বোঝাতে যেমন অনেক সময় সেট শব্দ ব্যবহার করা হয়, গণিতের বিভিন্ন আলোচনায়ও তেমনি "বাস্তব জগত বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহ" কে সেট বলা হয়। জ্যামিতির বিভিন্ন মৌলিক ধারণার মত সেটকে অসংজ্ঞায়িত পদ হিসেবে গ্রহণ করে শুধুমাত্র 'সুনির্ধারিত সংগ্রহ' বোঝাতেই আমরা সেট শব্দটি ব্যবহার করব। সুনির্ধারিত বলতে আমরা বুঝব যে, সেটে কী অন্তর্ভুক্ত আর কী অন্তর্ভুক্ত নয়, তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা।

সেটকে সাধারণত ইংরেজি বড় হরফ যেমন, A, B, C, D, X, Y ইত্যাদি এবং সেটের সদস্যকে ইংরেজি ছোট হরফ, a, b, c, x, y ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ধরা যাক, A হল সকল জোড় সংখ্যার সেট। অতএব, 6 হল A এর সদস্য। একে লেখা হয়, $6 \in A$ এবং পড়া হয়, 6 আছে A তে অথবা 6, A এর সদস্য। 5, A এর সদস্য নয়। একে লেখা হয়, $5 \notin A$ এবং পড়া হয়, 5 নেই A তে অথবা 5, A এর সদস্য নয়। সেটের সদস্যকে সেটের উপাদানও বলা হয়। সেটকে প্রকাশ করার দুইটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে।

1. তালিকা পদ্ধতি (Tabular Method) : এই পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে { } এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং উপাদানগুলোকে আলাদা করার জন্য কমা ব্যবহার করা হয়। যেমন,
$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
$B = \{b, o, y\}$
$C = \{1, 3, 5, 7, 9, .., .., ..\}$. ডট (.) দ্বারা অনুল্লিখিত উপাদান বোঝানো হয়।
তালিকা পদ্ধতিকে Roster Method ও বলা হয়।

2. সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method) : এই পদ্ধতিতে উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সেটকে বর্ণনা করা হয়। যেমন, $A = \{x : x$ জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
এখানে ':' চিহ্ন দ্বারা 'যেন' বোঝায়। ওপরের উদাহরণের অর্থ, A হল সকল x এর সেট যেন x জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ণয়ের নিয়ম বা Rule বলে দেওয়া হয়, এজন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

উদাহরণ 1. বাংলাদেশের সকল বিভাগের সেটকে S বিবেচনা করে তালিকা পদ্ধতি এবং সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : তালিকা পদ্ধতি, $S = \{$ঢাকা, চট্টগ্রাম, খুলনা, রাজশাহী, বরিশাল, সিলেট$\}$
সেট গঠন পদ্ধতি, $S = \{x : x$ বাংলাদেশের একটি বিভাগ$\}$

সসীম সেট : যে সেটে উপাদানের সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, সে সেটকে সসীম সেট বা সান্ত সেট বলা হয়। যেমন, $B = \{$ক, ল, ম$\}$ একটি সসীম সেট।

অসীম সেট : যে সেটে উপাদানের সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, সে সেটকে অসীম সেট বা অনন্ত সেট বলা হয়। সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$ একটি অসীম সেট।

সেটের সমতা : সেট A ও সেট B এর উপাদান একই হলে, এদেরকে সমান বলা হয় এবং $A = B$ চিহ্ন দিয়ে সমতা বোঝানো হয়। যেমন, $\{2, ক, e\} = \{ক, e, 2\}$
লক্ষণীয়, সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয়না। যেমন, $\{1, 2, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$

উপসেট : যদি A সেটের প্রত্যেক উপাদান B এরও উপাদান হয়, তবে A কে B এর উপসেট বলে। একে প্রতীকে লেখা হয়, $A \subset B$ এবং পড়া হয় A, B এর উপসেট। উদাহরণস্বরূপ, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ হলে $A \subseteq B$. A নিজেও A এর একটি উপসেট।

প্রকৃত উপসেট : A সেটের প্রত্যেক উপাদান যদি B সেটে বিদ্যমান থাকে এবং B সেটে অন্তত একটি উপাদান থাকে যা A সেটে নেই, তবে A কে B এর প্রকৃত উপসেট বলে। একে $A \subsetneq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। A, A এর প্রকৃত উপসেট নয়।

কোনো সেট A দেওয়া থাকলে তার কিছু উপাদান নিয়ে আরেকটি সেট B গঠন করলে, B অবশ্যই A এর উপসেট। এভাবে উপসেট গঠন করতে A এর কোন কোন উপাদান নিতে হবে তা সাধারণত এক বা একাধিক শর্তের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এর পাঁচটি উপসেট গঠন করা হল। এখানে $\frac{a}{b}$ প্রতীক দ্বারা বোঝায় যে স্বাভাবিক সংখ্যা a স্বাভাবিক সংখ্যা b কে নিঃশেষে ভাগ করে।

প্রতীক	কথায়
$A = \{x \in N : x < 10\}$	যেসব স্বাভাবিক সংখ্যা 10 এর ছোট তাদের সেট।
$B = \{x \in N : \frac{x}{16}\}$	যেসব স্বাভাবিক সংখ্যা 16 এর গুণনীয়ক তাদের সেট।
$C = \{x \in N : \frac{7}{x}\}$	যেসব স্বাভাবিক সংখ্যা 7 এর গুণিতক তাদের সেট।
$D = \{x \in N : x < 30$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$	যেসব মৌলিক সংখ্যা 30 এর ছোট তাদের সেট।
$E = \{x \in N : x^2 > 10$ এবং $x^3 < 100\}$	যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 10 থেকে বড় এবং ঘন 100 থেকে ছোট তাদের সেট।

কোন কোন সংখ্যা N এর উল্লিখিত উপসেটগুলোর উপাদান, তা প্রদত্ত শর্ত থেকে সহজেই নিরূপণ করা যায় :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$,
$C = \{7, 14, 21, 28, \ldots\ldots\ldots\}$, $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,
$E = \{4\}$

এদের মধ্যে C অসীম সেট অর্থাৎ C এর অসংখ্য উপাদান রয়েছে। E এক উপাদানী বা একপদী সেট।
লক্ষ করি, $E \subset A$, $E \subset B$, কিন্তু $E \not\subset C$, $E \not\subset D$.

ফাঁকা সেট : $\{x \in N : x < 9$ এবং $x > 10\}$ সেটে কোনো উপাদান নেই। কেননা, এমন কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা নেই যা 9 এর ছোট কিন্তু 10 এর বড়। এরূপ সেটকে ফাঁকা সেট বলে এবং $\{\ \}$ বা $\varnothing$ প্রতীক দিয়ে লেখা হয়।
ফাঁকা সেটের আরও অনেক উদাহরণ দেওয়া যায়। যেমন, $\{x \in N : 23 < x < 29$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$।

সার্বিক সেট : কোনো আলোচনায় বিবেচিত সকল সেট একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সেটকে আলোচনাধীন সকল সেটের সার্বিক (Universal) সেট বলা হয়। সার্বিক সেটের জন্য সাধারণত U প্রতীক ব্যবহার করা হয়। তবে অন্য যেকোনো প্রতীকও ব্যবহার করা যায়।

সংযোগ সেট : দুইটি সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ঐ সেটদ্বয়ের সংযোগ সেট বলে। A ও B এর সংযোগ সেটকে $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং পড়া হয়, "A সংযোগ B" বা "A union B"
সেট গঠনের প্রতীকে $A \cup B$ এর সংজ্ঞা দাঁড়ায়, $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$.

উদাহরণ 2. মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{2, 4, 6, 8\}$ দুইটি সেট।
$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. এখানে 2 এবং 4 সংখ্যা দুইটি উভয় সেটেই আছে, কিন্তু সংযোগ সেটে 2 এবং 4 কে পুনরাবৃত্তি না করে একবার নেওয়া হয়েছে।

ছেদ সেট : দুইটি সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ঐ সেটদ্বয়ের ছেদ সেট বলে। A ও B এর ছেদ সেটকে $A \cap B$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং "A ছেদ B" বা "A intersection B" পড়া হয়।
সেট গঠনের প্রতীকে $A \cap B$ এর সংজ্ঞা দাঁড়ায়, $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

উদাহরণ 3. $A = \{-1, 0, 2, 3\}, B = \{-3, 3, 4, 5\}$ হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3\} \cup \{-3, 3, 4, 5\} = \{-1, 0, 2, 3, -3, 4, 5\}$.
$A \cap B = \{-1, 0, 2, 3\} \cap \{-3, 3, 4, 5\} = \{3\}$.

উদাহরণ 4. $C = \{1, 2, 3, 4\}, D = \{0, 5, 6, 8\}$ হলে, $C \cup D$ ও $C \cap D$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $C \cup D = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 5, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 0, 5, 6, 8\}$.
$C \cap D = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 5, 6, 8\} = \varnothing$.

নিশ্ছেদ সেট : দুইটি সেটে যদি কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে, তবে ঐ সেটদ্বয়কে পরস্পর নিশ্ছেদ (Disjoint) সেট বলে। A ও B দুইটি নিশ্ছেদ সেট হলে, $A \cap B = \varnothing$.

ভেনচিত্র (জন ভেন : ১৮৩৪–১৮৮৩) : সেটের সংযোগ, ছেদ, ইত্যাদি কার্যবিধি এবং তাদের জন্য বলবৎ বিধিসমূহ জ্যামিতিক চিত্রে প্রদর্শন করলে, তাকে ভেনচিত্র বলে। এতে বিবেচনাধীন সেটগুলোকে সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের জ্যামিতিক ক্ষেত্র হিসেবে দেখানো হয়। সাধারণত আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট বোঝানো হয়। বৃত্তাকার বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র উপসেট বোঝাতে ব্যবহার করা হয়।

পূরক সেট : মনে করি, A, B দুইটি সেট। A এর যেসব উপাদান B এর উপাদান নয়, ঐ উপাদানগুলোর সেটকে A এর প্রেক্ষিতে B এর পূরক সেট বলা হয় এবং $A \backslash B$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$A \backslash B$ কে "A বাদ B" পড়া হয়।

$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$.

$A \backslash B$ এর জন্য $A - B$ প্রতীকও ব্যবহার করা হয়। B এর প্রেক্ষিতে A এর পূরক সেট হচ্ছে :

$B \backslash A = B - A = \{x \in B : x \notin A\}$.

কোনো প্রসঙ্গে U যদি সার্বিক সেট হয়, তবে $U \backslash A$ কে সংক্ষেপে A' দ্বারা সূচিত করা হয় এবং A এর পূরক সেট বলা হয়।

$\therefore A' = \{x \in U : x \notin A\}$.

কথায় : A এর উপাদানগুলো বাদে সার্বিক সেটের অন্য সকল উপাদান নিয়ে A' গঠিত।
ভেনচিত্রে A' দেখানো হল। এখানে, সার্বিক সেট U কে আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা এবং U এর উপসেট A কে বৃত্তাকার ক্ষেত্র দ্বারা দেখানো হয়েছে। A এর পূরক সেট A' কে দাগ দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে।

উদাহরণ 5. A ও B যথাক্রমে 108 ও 87 এর সকল উৎপাদক (বা গুণনীয়ক) এর সেট। A ও B নির্ণয় কর।

সমাধান : 108 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108.
সুতরাং $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$.
87 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে 1, 3, 29, 87.
সুতরাং $B = \{1, 3, 29, 87\}$.

উদাহরণ 6. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান : যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যাটি 31 অপেক্ষা বড় এবং সংখ্যাটি $(346 - 31) = 315$ ও $(556 - 31) = 525$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।
মনে করি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট = A
এবং 525 এর গুণনীয়কের সেট = B
$\therefore A = \{35, 45, 63, 105, 315\}$
এবং $B = \{35, 75, 105, 175, 525\}$
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= A \cap B = \{35, 105\}$

উদাহরণ 7. কোনো পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীর 80% গণিতে এবং 70% বাংলায় পাশ করল। উভয় বিষয়েই পাশ করল 60%। উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন ফেল করল?

সমাধান : পাশের ভেন চিত্রটি লক্ষ করি। এখানে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন পরীক্ষার্থীর সেট E নির্দেশ করে। M এবং B চিহ্নিত বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুইটি যথাক্রমে গণিতে পাশ এবং বাংলায় পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট নির্দেশ করে। ভেন চিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে যাদের P_1, P_2, P_3 এবং P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হল।
এখানে,
$P_2 = M \cap B$ উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা $= 60$
$P_1 = M \setminus P_2$ শুধু গণিতে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা $= 80 - 60 = 20$
$P_3 = B \setminus P_2$ শুধু বাংলায় পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা $= 70 - 60 = 10$
$\therefore M \cup B = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ এক এবং উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা $= 20 + 60 + 10 = 90$
$\therefore P_4 = E \setminus (M \cup B)$ উভয় বিষয়ে ফেল পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা $= 100 - 90 = 10$
$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 10% পরীক্ষার্থী।

প্রশ্নমালা 1.1

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ হলে, প্রদত্ত সংখ্যা ও সেটের মাঝখানে $\in$ বা $\notin$ প্রতীক বসিয়ে সত্য বাক্য গঠন কর :
   (i) 5   A   (ii) 8   A   (iii) 4   A   (iv) 0   A   (v) 10   A.

2. প্রদত্ত সেট দুইটির মাঝখানে $\subset$ বা $\not\subset$ বসিয়ে সত্য বাক্য গঠন কর :
   (i) $\{2, 3\}$ $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{1, b, c\}$ $\{b, c, d\}$
   (iii) { x : x তোমাদের বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর ছাত্র}   { x : x তোমাদের বিদ্যালয়ের ছাত্র}
   (iv) { x : x স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা}   { x : x পূর্ণ সংখ্যা}

3. নিম্নলিখিত সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে নির্ণয় কর :
   (i) $\{x \in N : x^2 > 15$ এবং $x^3 < 100\}$
   (ii) $\{x \in N : x$ এবং $x^2 < 13\}$
   (iii) $\{x \in N : 6 < x < 7\}$
   (iv) $\{x \in N : x < 10$ এবং জোড় সংখ্যা$\}$
   (v) $\{x \in N : x, 42$ এর গুণনীয়ক$\}$
   (vi) $\{x \in N : x < 19$ এবং $x, 3$ এর গুণিতক$\}$.

4. (i) A ও B যথাক্রমে 315 ও 525 এর সকল উৎপাদক এর সেট। A ও B নির্ণয় কর।
   (ii) যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট নির্ণয় কর।
   (iii) যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 105 এবং 147 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 35 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট নির্ণয় কর।

5. $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{3, a, b\}$ হলে, $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

6. $\{-1, 0, 1, 2\}$ এর তিনটি প্রকৃত উপসেট লেখ, যাদের প্রত্যেকের তিনটি উপাদান রয়েছে।

7. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$ হলে, $X \cap Y$ নির্ণয় কর।

8. $A = \{1, 2, 3\}, B = \varnothing$ হলে, $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

9. যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{2, 3, 4, 5\}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় কর :
   (i) $A - B$ (ii) $C - B$ (iii) A' (iv) B' (v) $A' \cup C'$ (vi) $A' \cap B'$.

10. 9 নম্বর প্রশ্নের সেটগুলোর জন্য নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলোর সত্যতা পরীক্ষা কর :
    (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(B \cap C)' = B' \cup C'$
    (iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    (iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
    (v) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$.

11. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 4, 7)$ হলে দেখাও যে,
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ এবং $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
[এরূপ তিনটি সেটের সংযোগ $A \cup B \cup C$ নিয়ে এর ছেদ $A \cap B \cap C$ লিখে বোঝান হয়]।

12. একটি শ্রেণীতে 100 জন শিক্ষার্থী ছিল। বার্ষিক পরীক্ষায় 94 জন বাংলায় পাশ করেছে। 80 জন গণিতে পাশ করেছে। 75 জন উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর। কতজন উভয় বিষয়ে ফেল করেছে?

13. 25 জন ছাত্রের একটি শ্রেণীতে প্রত্যেক ছাত্রকে কম্পিউটার বিজ্ঞান ও উচ্চতর গণিত এই দুইটি বিষয়ের অন্তঃত একটি নেওয়ার সুযোগ দেওয়া হল। দেখা গেল, 12 জন ছাত্র নিয়েছে কম্পিউটার বিজ্ঞান। এদের মধ্যে 8 জন উচ্চতর গণিত নেয়নি। যারা উভয় বিষয়ই নিয়েছে তাদের সংখ্যা এবং যারা শুধুমাত্র উচ্চতর গণিত নিয়েছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

পাওয়ার সেট (শক্তি সেট)

মনে করি, A একটি সেট। A সেটের যতগুলো উপসেট হয়, তাদের সেটকে A সেটের পাওয়ার সেট বলে এবং লেখা হয়, P (A).

উদাহরণ 8. (ক) $A = \{a\}$ হলে, P (A) নির্ণয় কর।
(খ) $A = \emptyset$ হলে, $P(\emptyset)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : (ক) A এর উপসেটগুলো হল, $\{a\}, \emptyset$ $\therefore P(A) = \{\{a\}, \emptyset\}$.
(খ) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, লক্ষণীয় যে, ফাঁকা সেটের পাওয়ার সেট ফাঁকা নয়।

উদাহরণ 9. $A = \{2, 3\}$ হলে, P (A) নির্ণয় কর।

সমাধান : A সেটের উপসেটগুলো হল, $\{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$
$\therefore P(A) = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$.

উদাহরণ 10. $A = \{$ 2, ক, e) হলে, P (A) এর সকল উপাদান লেখ।

সমাধান : P (A) এর সকল উপাদান হচ্ছে A এর সকল সম্ভাব্য উপসেট। এগুলো হল,
$\emptyset$, { 2 }, { ক }, { e }, {2, ক }, {2, e}, {ক, e}, { 2, ক, e}.

উদাহরণ 11. $A = \{a, b, c, d\}$ হলে, P (A) এর উপাদান সংখ্যা কত ?

সমাধান : P (A) এর সকল উপাদানগুলো হল,
$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$.
এগুলোর মোট সংখ্যা 16.

দ্রষ্টব্য : ওপরের উদাহরণগুলো হতে দেখা যায় যে, A এর উপাদান সংখ্যা n হলে, P(A) এর উপাদান সংখ্যা 2^n.

ক্রমজোড় : যেকোনো উপাদান x, y নিয়ে x কে প্রথম ও y কে দ্বিতীয় পদ বিবেচনা করলে আমরা একটি ক্রমজোড় (x, y) পাই। (x, y) প্রতীকটিকে কেবল জোড় না বলে ক্রমজোড় বলা হয়। কারণ, প্রথম অবস্থান ও দ্বিতীয় অবস্থানের ক্রম অনুসারে পদদ্বয় বিন্যস্ত আছে।

ক্রমজোড় (x, y) ও (a, b) সমান হয় অর্থাৎ $(x, y) = (a, b)$ হয়, যদি ও কেবল যদি $x = a$ এবং $y = b$ হয়।

x এবং y ভিন্ন উপাদান হলে, $(x, y) \neq (y, x)$ অর্থাৎ $(x, y) = (y, x)$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x = y$ হয়।

লেখচিত্রে, (x, y) দ্বারা একটি বিন্দু বোঝায়, যার ভুজ x এবং কোটি y। ক্রমজোড় $(3, 4)$ এবং $(4, 3)$ দ্বারা লেখচিত্রে দুইটি ভিন্ন বিন্দু বোঝায়। সুতরাং $(3, 4)$ এবং $(4, 3)$ দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড়। কিন্তু সেট হিসেবে $\{3, 4\} = \{4, 3\}$, কারণ, সদস্যের অবস্থান বদলালে সেট বদলায় না। ক্রমজোড় এবং দুই উপাদান বিশিষ্ট সেট এক নয়। লক্ষণীয়, প্রথম উপাদান a ও দ্বিতীয় উপাদান b বিশিষ্ট ক্রমজোড়কে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে a ও পরে b লিখে, অর্থাৎ (a, b) আকারে প্রকাশ করা হয়।

(a, a) একটি ক্রমজোড়, যেখানে প্রথম ও দ্বিতীয় পদ উভয়েই a.
উল্লেখ্য, $\{a, a\} = \{ a \}$, কিন্তু (a, a) কে শুধু (a) লেখা যায় না।

উদাহরণ 12. $(x + y, 0) = (1, x - y)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্ন মতে, $x + y = 1$ .... (i)
এবং $0 = x - y$, বা $x - y = 0$ .... (ii)
(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2x = 1$ বা, $x = \frac{1}{2}$
আবার, (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই, $2y = 1$, বা, $y = \frac{1}{2}$
সুতরাং, $x = y = \frac{1}{2}$
অতএব, $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian Product)

মনে করি, একটি গাড়ির বাইরের অংশে লাল, সবুজ বা নীল রঙ এর (এক প্রকারের) লেপন দেওয়া হবে এবং ভিতরের অংশে সাদা বা হলুদ রঙের (এক প্রকারের) লেপন দেওয়া হবে। বাইরের সম্ভাব্য রঙের সেটকে A এবং ভিতরের সম্ভাব্য রঙের সেটকে B ধরলে, $A = \{ r, g, b\}$ এবং $B = \{ w, y \}$, যেখানে r, g, b, w, y দ্বারা যথাক্রমে red, green, blue, white, yellow বোঝায়। বাইরের অংশের রঙকে প্রথম পদ এবং ভিতরের অংশের রঙকে দ্বিতীয় পদ বিবেচনা করলে সম্ভাব্য রঙগুলোর বিন্যাস হল, $(r, w), (r, y), (g,w), (g,y), (b,w), (b,y)$ এই ছয়টি ক্রমজোড়। এই সব ক্রমজোড়ের সেটের জন্য আমরা লিখি,
$A \times B = \{(r, w), (r, y), (g, w), (g, y), (b, w), (b, y)\}$.

এটি কার্তেসীয় গুণজের উদাহরণ। উল্লেখিত উদাহরণে $3 \times 2 = 6$ প্রকারের রঙের লেপন দেওয়া যায়।

উদাহরণ 13. সুজন ও আবিদ একত্রে লঞ্চযোগে ঢাকা আসছে। তাদের আলোচনায় জানা গেল সুজন বেড়াবে মামা ও খালার বাসায় এবং আবিদ বেড়াবে চাচা, ফুফু ও দাদার বাসায়। একই সময় ঢাকায় তাদের সম্ভাব্য অবস্থানগুলো ক্রমজোড়ের সাহায্যে বর্ণনা কর। ক্রমজোড়ে সুজনের অবস্থান প্রথম বিবেচ্য।

সমাধান : মনে করি, সুজনের বিভিন্ন অবস্থানের সেট $= A$
এবং আবিদের " " " $= B$
আরও মনে করি, ম দ্বারা মামা, খ দ্বারা খালা, চ দ্বারা চাচা, ফ দ্বারা ফুফু এবং দ দ্বারা দাদার বাসা বোঝায়। তাদের সম্ভাব্য অবস্থান হচ্ছে, $A \times B =$ {(ম, চ), (ম, ফ), (ম, দ), (খ, চ), (খ, ফ), (খ, দ)}.

কার্তেসীয় গুণজ : মনে করি, A ও B যেকোনো সেট। A ও B সেটের উপাদানগুলোর সকল ক্রমজোড়ের সেটই হল তাদের কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B$. একে পড়া হয়, A গুণ (cross) B, সেট গঠন পদ্ধতিতে লিখতে পারি,

$A \times B = \{ (x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$
যেকোনো সেট S এর জন্য, $S \times S = \{ (x, y) : x, y \in S\}$

উদাহরণ 14. যদি $S = \{1, 2, 4\}$ হয়, তবে $S \times S$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$.

উদাহরণ 15. যদি $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{a, b\}$ হয়, তবে $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(A \cap B) = \{ 3, 4, 5\} \cap \{ 4, 5, 6, 7\} = \{ 4, 5 \}$
$\therefore (A \cap B) \times C = \{ 4, 5\} \times \{a , b\} = \{ (4, a), (4, b), (5, a), (5, b)\}$.

প্রশ্নমালা 1.2

1. যদি $B = \{ 1, 2 \}$ হয়, তবে $P (B)$ নির্ণয় কর।
2. যদি $C = \{ a, b, c \}$ হয়, তবে $P (C)$ নির্ণয় কর।
3. যদি $(x + y, 1) = (3, x - y)$ হয়, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় কর।
4. যদি $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হয়, তবে (x, y) নির্ণয় কর।
5. দেওয়া আছে, $A = \{0, 1\}$ এবং $B = \{ 1, 2\}$. $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।
6. যদি $A = \{a, b, c\}$, $B = \{p, q\}$ হয়, তবে $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।
7. যদি $A = \{ a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{ 3, 4 \}$ হয়, তবে $A \times (B \cup C)$ এবং $A \times (B \cap C)$ নির্ণয় কর।
8. যদি $A = \{ a \}$ এবং $B = \{ 0 \}$ হয়, তবে $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।
9. যদি $A = \{ -1, 1 \}$, $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ হয়, তবে $A \times B$ নির্ণয় কর।
10. আবুল এবং বাবুল দুই বন্ধু। তারা ঠিক করে যে, কোনো এক নির্দিষ্ট দিনে টিফিন পিরিয়ডে আবুল যাবে হয় ক্যান্টিনে, লাইব্রেরিতে না হয় খেলার মাঠে, বাবুল যাবে হয় লাইব্রেরিতে বা বাগানে। ঐ সময় তাদের সম্ভাব্য অবস্থানগুলো গুণজ সেট দ্বারা বর্ণনা কর। ক্রমজোড়ে আবুলের অবস্থান প্রথম বিবেচ্য।

    [ইঙ্গিত : ক্যান্টিনকে c, লাইব্রেরিকে l, মাঠকে f, বাগানকে g প্রতীকে বিবেচনা কর। আবুলের অবস্থানের সেটকে A এবং বাবুলের অবস্থানের সেটকে B ধর।]
11. কোনো ক্লাশে অনু, সুমন ও মীম ক্যাপ্টেন পদপ্রার্থী এবং রাহি ও মাশা সহক্যাপ্টেন পদপ্রার্থী। ক্যাপ্টেনের নাম প্রথমে রেখে তাদের সম্ভাব্য নির্বাচনী জোট গুণজ সেটের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
12. জাতীয় ক্রিকেট দলের তিনজন খেলোয়াড়ের একটি সেট $A = \{$ আকরাম, বুলবুল, নান্নু $\}$। এদের মধ্য থেকে অধিনায়ক ও সহঅধিনায়কের সম্ভাব্য জুটি গঠন কর এবং গুণজ সেটের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। A = {0, 1, 2} এবং B = {-1, 0, 1} হলে, নিচের কোনটি AUB এর সঠিক মান?

ক. {0, 1} খ. {0, 1, 2}

গ. {- 1, 0, 1} ঘ. {-1, 0, 1, 2}

২। যদি সেট P, সেট Q এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. $P \subsetneqq Q$ খ. $P \subseteq Q$

গ. $Q \subset P$ ঘ. $P \subset Q$

৩। নবম শ্রেণীর কিছু শিক্ষার্থীর রোল নম্বর A দ্বারা সূচিত হয় যা 12 এর গুণনীয়ক। নিচের কোনটি সেট A নির্দেশ করে ?

ক. {12, 24, 36, 48, ...} খ. {1, 2, 3, 4, 6, 12}

গ. {2, 3, 4, 6} ঘ. {2, 3, 4, 6, 12}

৪। নিচের গাণিতিক বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. $A \cup B = \{ x : x \in A$ অথবা $x \in B \}$

ii. $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B \}$

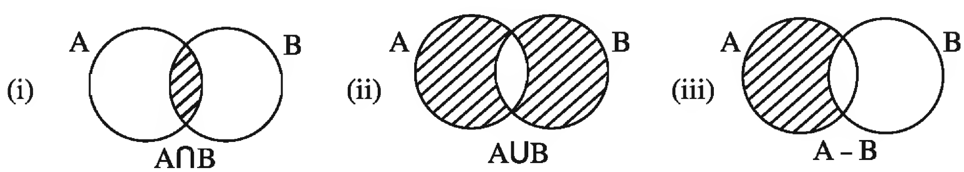
iii. $A' = \{ x : x \in U$ এবং $x \in A \}$

ওপরের বাক্যের প্রেক্ষিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫। নিচের ভেনচিত্র লক্ষ কর :



ওপরের চিত্রের প্রেক্ষিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৬ – ৮) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

$X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c\}$ এবং $Z = \{3, 4\}$ হলে,

৬। $X \cup Y \cup Z$ **এর উপাদান সংখ্যা কত ?**

ক. 2 খ. 3

গ 4 ঘ. 5

৭। $P(X \cap Y)$ **এর সঠিক মান কোনটি ?**

ক. $\{b, \phi\}$ খ. (b, ϕ)

গ. $\{b\}, \phi$ ঘ. $\{b\}$

৮। **নিচের কোনটি দ্বারা** $(X \cap Y) \times Z$ **নির্দেশ করে?**

ক. $\{(a, 3), (a,4)\}$ খ. $\{(b, 3), (b, 4)\}$

গ. $\{(a, 3), (b, 4)\}$ ঘ. $\{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4), (c, 3), (c, 4)\}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। A, B, C তিনটি সেট। যেখানে,

$A = \{x \in N : x < 7$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$B = \{x \in N : x < 7$ এবং x জোড় সংখ্যা$\}$

$C = \{x \in N : x \leq 3$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$

ক. সেট A ও সেট B কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. $P(A \cap C)$ নির্ণয় করে দেখাও যে, এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

গ. প্রমাণ কর যে, $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$.

২। তোমাদের বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের 55% মিষ্টি, 65% ফল এবং 30% শিক্ষার্থী উভয় প্রকার টিফিন পছন্দ করে।

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলোকে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাও।

খ. শতকরা কতজন শিক্ষার্থী উভয় প্রকার টিফিন পছন্দ করে না তা নির্ণয় কর।

গ. শুধু মিষ্টি পছন্দ করে এবং শুধু ফল পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যার গুণনীয়কের সেটকে যথাক্রমে A ও B ধরে কার্তেসীয় গুণজের মাধ্যমে প্রকাশ কর। (ক্রমজোড়ে A এর অবস্থান প্রথম বিবেচ্য)।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা

সভ্যতার শুরুতে মানুষের দৈনন্দিন জীবনের চাহিদা মেটাতে উদ্ভব হয় গণনাকারী একটি/দুইটি সংখ্যা। সংখ্যার ক্রমবিকাশের ফলে বিকশিত হয়েছে আধুনিক গণিত। তাই সংখ্যা সম্বন্ধে সম্যক ধারণা থাকা গণিত শিক্ষার্থীর জন্য অপরিহার্য।

ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে অল্প সময়ে গাণিতিক হিসাব করা যায়। সাধারণ ক্যালকুলেটরে সাধারণত 24টি বোতাম থাকে। ভিন্ন ভিন্ন বোতামে Off, Min (Memory input), MR (Memory remind), M-(Memory minus), M+ (Memory plus), $\div$, %, $\sqrt{\ }$, C (cancel), AC, on, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এবং $\cdot$ (দশমিক), $+$, $-$, $\times$, $=$ এর চিহ্ন নির্দেশ করা আছে।

কাজ শুরু করার আগে AC এর বোতামটি টিপতে হয়। এরপর প্রয়োজনমত $+$, $-$, $\times$, $\div$ অথবা $\sqrt{}$ এর বোতামে টিপ দিয়ে $=$ এর বোতামে টিপ দিলে ফল পাওয়া যায়। কোনো সংখ্যাকে ধরে রাখার জন্য ক্যালকুলেটরের Min বোতাম ব্যবহার করা হয়। সেই ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সংখ্যার বোতাম টিপে Min বোতামে টিপ দিলে ঐ সংখ্যাটি ক্যালকুলেটরে সংরক্ষিত হবে। পরবর্তীতে Off অথবা AC বোতামে টিপ না দিয়ে প্রয়োজনীয় গাণিতিক হিসাব বের করার পরেও MR বোতামে টিপ দিলে ক্যালকুলেটরে সংরক্ষিত সেই প্রয়োজনীয় সংখ্যাটি চলে আসবে। গাণিতিক হিসাবের সময় ভুলে কোনো বোতামে টিপ লাগলে ভুল বাতিলের জন্য C বোতামে টিপ দিতে হয়। দক্ষতার সাথে ক্যালকুলেটর ব্যবহারের জন্য ক্যালকুলেটরের ম্যানুয়েল পুস্তিকাটি ভালোভাবে পড়ে নিতে হয়।

উদাহরণ : $15 \times 4 =$ কত?

প্রথমে AC বোতামে টিপ দিয়ে কাজের জন্য প্রস্তুত করা হল। এরপর 1 বোতামটি টিপ দেওয়ার পর 5 বোতামটি টিপ দিলে সংখ্যাটি হল 15, এরপর $\times$ এর বোতামটি টিপ দেওয়ার পর 4 বোতামটি টিপ দেওয়া হল। এরপর $=$ বোতামটি টিপ দেওয়ার পর ফল পাওয়া গেল 60, সুতরাং $15 \times 4 = 60$.

বাস্তব সংখ্যা

1, 2, 3, ... ইত্যাদি সংখ্যা গণনা করার জন্য ব্যবহার করা হয়। যেমন, কতজন ছাত্র, কয়টি মাছ, কয়টি নৌকা ইত্যাদি জানতে চাইলে উত্তরে সুনির্দিষ্ট সংখ্যা যেমন, 1, 2, 3, 4, 5, ... বলতে হবে। এ জাতীয় সংখ্যাকে বলে গণনাকারী বা স্বাভাবিক সংখ্যা। এ সকল সংখ্যার সেটকে সাধারণত N দ্বারা সূচিত করা হয়।
অর্থাৎ, $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

স্বাভাবিক সংখ্যা সেটের ক্ষুদ্রতম সদস্য হল 1, কোনো বৃহত্তম সদস্য নেই। গণনা ছাড়াও স্বাভাবিক সংখ্যা পরিমাণ এবং পরিচিতির জন্য ব্যবহার করা হয়। যেমন, 5 কেজি চাল, 2 লিটার দুধ বা রোল নং 29. দুই বা ততোধিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল স্বাভাবিক সংখ্যা। কিন্তু বিয়োগফল স্বাভাবিক সংখ্যা নাও হতে পারে। যেমন, $5 - 9 =$ কত? বিয়োগকে সার্থক করার জন্য শূন্যের এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার অবতারণা করা হয়। $-1, -2, -3, ...$ ইত্যাদি হল ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ ইত্যাদি সংখ্যাকে বলা হয় পূর্ণ সংখ্যা। সকল পূর্ণ সংখ্যার সেটকে Z দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore\ Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$. লক্ষণীয় যে, $N \subset Z$

পূর্ণ সংখ্যার সেটে ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম কোনো সদস্য নেই। পূর্ণ সংখ্যার সেটে যোগ, বিয়োগ এবং গুণ প্রক্রিয়ার ফল পূর্ণ সংখ্যাই হয়। কিন্তু পূর্ণ সংখ্যাকে শূন্য বাদে পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল পূর্ণ সংখ্যার মধ্যে সীমাবদ্ধ নাও থাকতে পারে। যেমন, $4 \div 5 = \frac{4}{5}$. এ জাতীয় সংখ্যা মূলদ সংখ্যা। সাধারণভাবে, p যদি পূর্ণ সংখ্যা এবং q যদি অশূন্য পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে। সকল মূলদ সংখ্যার সেটকে Q দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore Q = \{ \frac{p}{q} : p, q \in Z$ এবং $q \neq 0 \}$

p কে ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য বিবেচনা করে যে কোনো মূলদ সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে, $q > 0$.
যেমন, $5 = \frac{5}{1}, \quad -8 = \frac{-8}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}$.
লক্ষণীয়, প্রত্যেক পূর্ণ সংখ্যাই মূলদ সংখ্যা। অতএব, $Z \subset Q$. a ও b দুইটি মূলদ সংখ্যা হলে, $a + b$, $a - b$ এবং ab মূলদ সংখ্যা; $\frac{a}{b}$ মূলদ সংখ্যা, যখন $b \neq 0$.

এমন অনেক সংখ্যা রয়েছে, যেগুলো মূলদ সংখ্যা নয়। এরূপ সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয়, এমন যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। তাই $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \ldots\ldots$ প্রত্যেকটি সংখ্যা অমূলদ। $\sqrt{2}$ যে অমূলদ সংখ্যা তার একটি পরোক্ষ প্রমাণ নিচে দেওয়া হল।

প্রতিজ্ঞা : $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ : $1^2 = 1, 2^2 = 4$ এবং $(\sqrt{2})^2 = 2$

সুতরাং $\sqrt{2}$, 1 থেকে বড় কিন্তু 2 থেকে ছোট। অতএব $\sqrt{2}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। যদি $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হয়, তবে ধরা যায় $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা, $q > 1$ এবং p, q সহমৌলিক (p ও q এর মধ্যে 1 ভিন্ন কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই)।

ফলে $2 = \frac{p^2}{q^2}$ বা, $2q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

$2q$ স্পষ্টত পূর্ণ সংখ্যা। অপর পক্ষে, p^2 এবং q এর মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই যেহেতু p এবং q এর কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং $\frac{p^2}{q}$, $2q$ এর সমান হতে পারে না।
$\therefore \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাই হতে পারে না। তাই $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

বি: দ্র: ($\sqrt{2}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা) যে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক; তার কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{2}$ একক [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]।

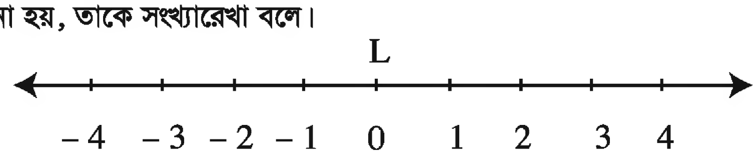
বাস্তব সংখ্যা : সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা নিয়ে বাস্তব সংখ্যার সেট R গঠিত। লক্ষণীয় যে,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$a \in R$ এর অর্থ, a একটি বাস্তব সংখ্যা, অর্থাৎ a একটি মূলদ কিংবা অমূলদ সংখ্যা।

সংখ্যারেখা

বাস্তব সংখ্যাকে সরলরেখার ওপর বিন্দুর সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায়। যে রেখায় বিন্দুর সঙ্গে সংখ্যার এক–এক মিল দেখানো হয়, তাকে সংখ্যারেখা বলে।



L দ্বারা একটি অসীম রেখা সূচিত করা হল। একটি বিন্দুকে (শূন্য) 0 দ্বারা চিহ্নিত করা হল। 0 এর ডানে প্রতি 1 একক দূরত্বের বিন্দুসমূহকে $1, 2, 3, 4$ ইত্যাদি এবং বামের বিন্দুসমূহকে $-1, -2, -3, -4$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা হল। 0 এবং 1 এর মাঝের বিন্দু $\frac{1}{2}$, 0 ও $\frac{1}{2}$ এর মাঝের বিন্দু $\frac{1}{4}$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা যায়। 0 এর বামেও এভাবে সমান দূরত্বের বিন্দু দ্বারা $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ ইত্যাদি সূচিত করা যায়। লক্ষণীয়, এগুলো সবই মূলদ সংখ্যা এবং মূলদ সংখ্যা দ্বারা সংখ্যারেখায় সকল বিন্দু পূরণ করা যায় না। ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা 2 এর বর্গমূল সঠিক পাওয়া যায় না। জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $\sqrt{2}$ কে সংখ্যারেখায় দেখানো যায়। অনুরূপ পদ্ধতিতে $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$ অমূলদ সংখ্যাগুলোকে সংখ্যারেখায় দেখানো যায়। মূলদ, অমূলদ যেকোনো সংখ্যারই সংখ্যারেখায় একটি সুনির্দিষ্ট প্রতিরূপী বিন্দু রয়েছে, বিপরীতক্রমে সংখ্যারেখাস্থ যেকোনো বিন্দু একটি সুনির্দিষ্ট (মূলদ বা অমূলদ) সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দু। আমরা বলি, সংখ্যারেখায় সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে সংখ্যারেখাস্থ সকল বিন্দুর এক–এক মিল রয়েছে। a, b দুইটি অসমান বাস্তব সংখ্যা হলে, হয় $a > b$ না হয় $a < b$ হবে। সংখ্যারেখায় $a > b$ এর অর্থ, a এর প্রতিরূপী বিন্দু b এর প্রতিরূপী বিন্দুর ডানে অবস্থিত, যেমন, চিত্রে $3 > 2, 3 > -2, -3 < 2, -3 > -4$.

বাস্তব সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ

মূলদ সংখ্যাকে সসীম দশমিকে কিংবা আবৃত বা পৌনঃপুনিক দশমিকে প্রকাশ করা যায়। q এর উৎপাদক যদি শুধু 2 অথবা 5 হয়, তবে মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ কে সসীম দশমিকে প্রকাশ করা যায়।

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{2.2} = 1{\cdot}25, \quad \frac{7}{10} = \frac{7}{2.5} = 0{\cdot}7$$

2 অথবা 5 ছাড়া অন্য কোনো মৌলিক সংখ্যা যদি q এর উৎপাদক হয়, তবে $\frac{p}{q}$ এর মান আবৃত বা পৌনঃপুনিক দশমিকে পাওয়া যায়। যেমন, $\frac{5}{111} = \frac{5}{3.37} = 0{\cdot}045045 \ldots = 0{\cdot}\dot{0}4\dot{5}$

বিপরীতক্রমে, যেকোনো সসীম বা আবৃত দশমিক ভগ্নাংশ একটি মূলদ সংখ্যা।

সসীম দশমিক সংখ্যাকে ডানে পুনঃপুন শূন্য বসিয়ে অসীম দশমিক আকারে দেখানো যায় বা আবৃত দশমিকেও প্রকাশ করা যায়। যেমন $0{\cdot}3 = 0{\cdot}30000.$

$0{\cdot}3 = 0{\cdot}29999 \ldots = 0{\cdot}2\dot{9}.$

যে অসীম দশমিক ভগ্নাংশ পৌনঃপুনিক নয়, তা একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন,

$0{\cdot}1010010001000010000001$.............

$0{\cdot}12112111211112$...............

$0{\cdot}303003000300003$........

প্রত্যেকে অমূলদ সংখ্যা।

ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল, ঘনমূল ইত্যাদির মূল বের করতে গেলে প্রায়শ অমূলদ সংখ্যার আবির্ভাব হয়। কিন্তু আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ব্যবসা–বাণিজ্যে অমূলদ সংখ্যার আসন্ন মূলদ মানই ব্যবহার করি।

লক্ষণীয়, অমূলদ সংখ্যা এবং এর আসন্ন মূলদ মান সমান নয় যদিও আমরা প্রায়ই তাদের সমান লিখে থাকি;

যেমন, $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$

বাস্তবিক পক্ষে, $\sqrt{2} = 1{\cdot}41421356.......... \approx 1{\cdot}414$
$\approx$ চিহ্ন দ্বারা সংখ্যার আসন্ন মান নির্দেশ করা হয়েছে।

পরমমান

$a > 0$ হলে, a এর পরমমান a, $a < 0$ হলে, a এর পরমমান $-a$ এবং $a = 0$ হলে, a এর পরমমান 0 ধরা হয়।
a এর পরমমানকে $|a|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{যদি } a > 0 \\ -a, & \text{যদি } a < 0 \\ 0, & \text{যদি } a = 0 \end{cases}$$

যেমন, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$.
যে কোনো সংখ্যা a, b এর জন্য $|ab| = |a|\ |b|$
a এবং b এর অন্তর বলতে তাদের একটি থেকে অপরটির বিয়োগফলের পরমমান বোঝায়,
অর্থাৎ, $a \sim b = |a - b| = |b - a|$. $\sim$ চিহ্ন দ্বারা দুইটি সংখ্যার অন্তর নির্দেশ করা হয়।

দূরত্ব নির্ণয়

সংখ্যারেখায় দুইটি সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের পরিমাপ সংখ্যা দুইটির দূরত্ব নির্দেশ করে। সংখ্যারেখা থেকে দেখা যায় 2 এবং -2 এর দূরত্ব 4।

বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যা বিয়োগ করলেই দূরত্ব পাওয়া যায়।

যেমন, -3 এবং -27 এর দূরত্ব $-3-(-27) = -3+27 = 24$, কেননা $-3 > -27$.

উদাহরণ : $\sqrt{5}$ এবং -2 এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sqrt{5}$ ধনাত্মক ও -2 ঋণাত্মক, বিধায় $\sqrt{5} > -2$.
সুতরাং, $\sqrt{5}$ এবং -2 এর দূরত্ব $\sqrt{5}-(-2) = \sqrt{5}+2$.

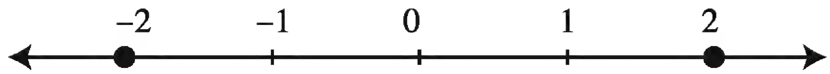
বাস্তব সংখ্যার কতিপয় বৈশিষ্ট্য

1. $a \in R, b \in R$ হলে, $a + b \in R$ এবং $ab \in R$.
2. $a \in R, b \in R$ হলে, $a + b = b + a$ এবং $ab = ba$.
3. $a \in R, b \in R, c \in R$ হলে, $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং $(ab)c = a(bc)$.
4. R এ দুইটি বিশেষ সংখ্যা 0 ও 1 বিদ্যমান যেখানে, $0 \neq 1$ এবং $a + 0 = a$ এবং $a\,.\,1 = a$.
5. $a \in R$ হলে, $a + (-a) = 0$ এবং $a \in R, a \neq 0$ হলে $a.\dfrac{1}{a} = 1$.
6. $a, b, c, \in R$ হলে, $a(b + c) = ab + ac$.
7. $a, b \in R$ হলে, পাশের একটি ও কেবল একটি শর্ত খাটে : $a = b, a > b, a < b$.
8. $a, b, c, \in R$ এবং $a < b$ হলে, $a + c < b + c$.
9. $a, b, c \in R$ এবং $a < b$ হলে, $ac < bc$ যখন $c > 0$ এবং $ac > bc$ যখন $c < 0$.

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $|x| = 2$.

সমাধান : x অঋণাত্মক হলে, $|x| = x = 2$
x ঋণাত্মক হলে, $|x| = -x = 2, \quad \therefore x = -2$

উত্তর : $x = 2$ অথবা $x = -2$.



মন্তব্য : সংখ্যারেখায় শুধু 2 বা –2 সমীকরণটি সিদ্ধ করে; সুতরাং আমরা বলতে পারি, $|x| = 2$ সমীকরণটির সমাধান সেট, $S = \{2, -2\}$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর ও সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও : $|x| < 3$.

সমাধান : x অঋণাত্মক হলে, $|x| = x < 3$ অর্থাৎ x এর মান 3 থেকে ছোট যেকোনো অঋণাত্মক সংখ্যা।
অর্থাৎ, এক্ষেত্রে $0 \leq x < 3$
আবার x ঋণাত্মক হলে, $|x| = -x < 3$ বা $x > -3$ [উভয়পক্ষকে –1 দ্বারা গুণ করে।]
অর্থাৎ, x এর মান –3 থেকে বড় যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ, এক্ষেত্রে $-3 < x < 0$,
$\therefore -3 < x < 0$ অথবা $0 \leq x < 3$ অর্থাৎ, $-3 < x < 3$.
সুতরাং সমাধান সেট, $S = \{x \in R : -3 < x < 3\}$
সংখ্যারেখায় :

লক্ষণীয়, 3 এবং –3 এর বিন্দুতে বৃত্ত এঁকে বৃত্ত ভরাট না করে 3 এবং –3 সমাধান সেট থেকে বাদ যাবে, বোঝানো হয়েছে।

মন্তব্য : অসমতার ক্ষেত্রে ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন উল্টে যায়।

উদাহরণ 3. a এবং b এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর, যেখানে
$a = 0{\cdot}202002000200002$.............
$b = 0{\cdot}2002000200002$.............

সমাধান : a এবং b দুইটি অসীম অনাবৃত দশমিক সংখ্যা, অর্থাৎ অমূলদ সংখ্যা।
$c = 0{\cdot}201$ মূলদ সংখ্যাটি বিবেচনা করি।
লক্ষ করি, a এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 2,
b এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 0,
c এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 1 এবং $0 < 1 < 2$.
সুতরাং, a, c থেকে বড় এবং c, b থেকে বড়, অর্থাৎ, $a > c > b$
আবার, $d = 0{\cdot}201002000200002$ .... সংখ্যাটি বিবেচনা করি, এটি একটি অমূলদ সংখ্যা।
লক্ষ করি, a এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 2,
b এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 0,
d এর দশমিকের ডানের তৃতীয় অঙ্ক 1 এবং $0 < 1 < 2$.
সুতরাং $a > d > b$. d অসীম ও অনাবৃত দশমিক, সুতরাং d অমূলদ সংখ্যা।

বি: দ্র: যেকোনো দুইটি বাস্তব সংখ্যার মাঝে অসংখ্য মূলদ ও অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা আছে।

উদাহরণ 4. 2 এবং $2{\cdot}5$ এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা বের কর।

সমাধান : $a = 2{\cdot}101001000100001$ ....
এবং $b = 2{\cdot}202002000200002$ .... সংখ্যা দুইটি বিবেচনা করি।
স্পষ্টত, $2 < 2{\cdot}10100100010000$ .... $< 2{\cdot}5$
এবং $2 < 2{\cdot}202002000200002$ ...... $< 2{\cdot}5$

2 এবং $2{\cdot}5$ এর মাঝে a ও b অবস্থিত এবং a ও b উভয়ে অমূলদ সংখ্যা।
$\therefore$ a ও b দুইটি অমূলদ সংখ্যা, যা 2 এবং $2{\cdot}5$ এর মধ্যে অবস্থিত।

উদাহরণ 5. দেখাও যে, $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

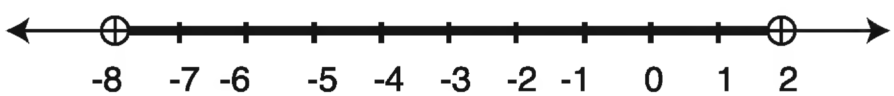
$= \dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\approx 2{\cdot}23606 + 1{\cdot}73205 = 3{\cdot}96811 \approx 3{\cdot}968$

মন্তব্য : আসন্ন মান নির্দেশ করতে $\approx$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $|x+3| < 5$ এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

সমাধান : $x+3 \geq 0$ হলে অর্থাৎ $x \geq -3$ হলে প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়, $x+3 < 5$.
বা, $x < 5-3$ বা, $x < 2$
$\therefore$ এক্ষেত্রে, $-3 \leq x$ এবং $x < 2$ অর্থাৎ, $-3 \leq x < 2$.
আবার, $(x+3)$ ঋণাত্মক অর্থাৎ, $x < -3$ হলে প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়, $-(x+3) < 5$
বা, $x+3 > -5$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
বা, $x > -5-3$ বা, $x > -8$.
$\therefore$ এক্ষেত্রে, $-8 < x$ এবং $x < -3$
অর্থাৎ, $-8 < x < -3$
সুতরাং, $-8 < x < -3$ অথবা $-3 \leq x < 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $-8 < x < 2$
অতএব, সমাধান সেট, $S = \{x \in R : -8 < x < 2\}$.
সংখ্যারেখায় S দেখানো হল :



উদাহরণ 7. দেখাও যে, কোনো বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 হবে।

সমাধান : n বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলে,
$n = 2x - 1$ লেখা যায়, যেখানে $x \in N$, এক্ষেত্রে
$n^2 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = 4x(x-1) + 1$
$n = 1$ হলে, $n^2 = 1$ যাকে 8 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 1 হয়।
যেহেতু, x এবং $x-1$ দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা, এদের মধ্যে একটি জোড় সংখ্যা হবেই।
সুতরাং $x(x-1)$, 2 দ্বারা বিভাজ্য; ফলে $4x(x-1)$ সংখ্যাটি $4 \times 2 = 8$ দ্বারা বিভাজ্য।
অতএব, যেকোনো বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে 1 ভাগশেষ থাকবে।

প্রশ্নমালা 2

1. আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও :

   (i) $\sqrt{17}$ (ii) $\sqrt{18}$ (iii) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (iv) $1+\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{2}-1$.

2. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

   (i) $|x| \leq 4$ (ii) $1 < |x| < 2$ (iii) $|x| = \sqrt{2}$ (iv) $\frac{|x|}{2} = 5$.

3. দূরত্ব নির্ণয় কর :

   (i) -2 এবং -3 (ii) -3 এবং 4 (iii) -5 এবং $|-5|$.

4. সমাধান কর : (i) $|x-5| < 4$ (ii) $|x-5| = 4$ (iii) $|x-5| > 4$

5. $0{\cdot}1$ এবং $0{\cdot}12$ এর মাঝে দুইটি অমূলদ সংখ্যা বের কর।

6. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{3}$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বের কর। এদের মাঝে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

7. $0{\cdot}1$ এবং $0{\cdot}1101$ এর মাঝে একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

8. সমাধান সেট নির্ণয় কর : (i) $|3x+2| < 7$ (ii) $\left|\frac{x+2}{x+5}\right| = 3$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ এর মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

11. চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

    (i) $\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

প্রশ্ন

১। সেটের ক্ষেত্রে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. $N \subset Q \subset Z \subset R$ খ. $N \subset Z \subset Q \subset R$

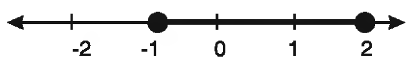
গ. $Z \subset N \subset Q \subset R$ ঘ. $Z \subset N \subset R \subset Q$.

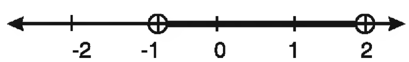
২। $P = -3$ হলে, $|P|$ এর সঠিক মান কত?

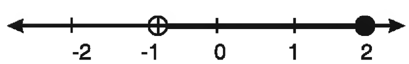
ক. -3 খ. 0

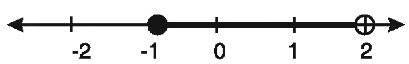
গ. ± 3 ঘ. 3

৩। $S = \{x \in R : -1 < x \leq 2\}$ সেটটির সংখ্যারেখায় প্রকাশিত রূপ নিচের কোনটি ?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

৪। নিচের বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. শূন্য একটি স্বাভাবিক সংখ্যা

ii. $\sqrt{8}$ একটি অমূলদ সংখ্যা

iii. সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন উত্তরটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৫ - ৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

$f(x) = x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$

৫। $x = a$ হলে, নিচের কোনটি $|f(x)|$ এর সঠিক মান ?

ক. b খ. $-b$

গ. b^2 ঘ. $-b^2$

৬। $f(x) = 0$ হলে, নিচের কোন সমাধান সেটটি সঠিক ?

ক. $\{x \in R : x = -a - b$ অথবা $x = a + b\}$

খ. $\{x \in R : x = -a + b$ অথবা $x = a - b\}$

গ. $\{x \in R : x = -a - b$ অথবা $x = a - b\}$

ঘ. $\{x \in R : x = a - b$ অথবা $x = a + b\}$

৭। **$a = 0{\cdot}1020$ এবং $b = 0{\cdot}1101$ হলে, a ও b এর মাঝে নিচের কোন অমূলদ সংখ্যাটি সঠিক ?**

ক. $0{\cdot}101020020002$...............

খ. $0{\cdot}101010010001$...............

গ. $0{\cdot}102010010001$...............

ঘ. $0{\cdot}1101202002$...................

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। দীপ ও দিপা গত বার্ষিক পরীক্ষায় গণিতে যথাক্রমে x ও 65 নম্বর পেল। তাদের প্রাপ্ত নম্বরের অন্তর 3 এর বেশি নয় এবং 2 এর কম নয়।

ক. ওপরের তথ্যগুলোকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. অসমতাটি সমাধান কর।

গ. প্রাপ্ত সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও এবং 2 ও 3 এর মাঝে একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

বীজগাণিতিক রাশি : পাটিগণিতে নির্দিষ্টমানের (ধ্রুবক) সংখ্যা দ্বারা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রভৃতি প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। বীজগণিতে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও a, b, c, x, y, z, α, β প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যাই ব্যবহৃত হয়। দৈনন্দিন জীবনে সাধারণত পাটিগণিতীয় হিসাব–নিকাশ করা হয়। বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বায়নকৃত রূপ বলা যায়। পাটিগণিতে গুণনের জন্য $\times$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়, কিন্তু বীজগণিতে সাধারণত তা করা হয় না। এর একটি কারণ, গুণের চিহ্ন $\times$ এবং ইংরেজি বর্ণ x বিভ্রান্তি সৃষ্টি করতে পারে। বীজগণিতে ab লিখলে $a \times b$ (বা $a \,.\, b$) বোঝায়। সুতরাং $a = 2$, $b = 3$ হলে, $ab = 2.3 = 6$। কিন্তু পাটিগণিতে 23 লিখলে (দশগুণোত্তর বা দশমিক অঙ্কপাতন পদ্ধতিতে) $2.10 + 3$ বোঝায়। বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের হর অপেক্ষা লব নিম্ন মাত্রার হলে, ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{x^2+x+2}{x^3+2x}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। হর অপেক্ষা লব নিম্ন মাত্রার না হলে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{x^3+1}{x^2+x+1}$ এবং $\frac{x^3+x+1}{x^3-x}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে ভাগ প্রক্রিয়ায় একটি বহুপদী (পূর্ণ অংশ) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $\frac{x^2+3}{x-1} = (x+1) + \frac{4}{x-1}$

চল : যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের যেকোনো উপাদানকে বোঝায়, তাকে চল বলে।
যেমন, $A = \{ x \in R : 1 \leq x \leq 20 \}$ এক্ষেত্রে x একটি চল। x এর মান 1 থেকে 20 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা।

ঘাত : a^n কে a এর n তম ঘাত বা শক্তি বলে, $n \in N$

সূত্র : সূত্র হল চল সম্বলিত সমীকরণ যেখানে সংশ্লিষ্ট চলের যেকোনো মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অথবা প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়মকে সূত্র বলে।

সূত্র : $(p + x)(q + x) = pq + (p + q)x + x^2$

প্রমাণ :
$$\begin{aligned}(p + x)(q + x) &= p(q + x) + x(q + x)\\ &= pq + px + qx + x^2\\ &= pq + (p + q)x + x^2\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i)
$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a.a + (a + a)b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= \{a + (-b)\}\{a + (-b)\}\\ &= a.a + (a + a)(-b) + (-b)(-b) = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

(iii) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

(iv) $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

(v) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

(vi) $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$

(vii) $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

(viii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

বর্গসূত্রের সম্প্রসারণ :

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

অনুসিদ্ধান্ত : $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

উদাহরণ 1. $(3a - 2x)$ এর বর্গ কত?

সমাধান : $(3a-2x)^2 = (3a)^2 - 2.3a.2x + (2x)^2 = 9a^2 - 12ax + 4x^2$.

উদাহরণ 2. সরল কর : $(3x+2y)^2 + 2(3x+2y)(3x-2y) + (3x-2y)^2$

সমাধান : এখানে, $3x + 2y = a$ এবং $3x - 2y = b$ ধরলে,

প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$= \{(3x+2y) + (3x-2y)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= (3x + 2y + 3x - 2y)^2 = (6x)^2 = 36x^2$.

উদাহরণ 3. যদি $a + b = 7$ এবং $ab = 12$ হয়, তবে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান : $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 7^2 - 4.12 = 49 - 48 = 1$

$\therefore a - b = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

উদাহরণ 4. $x - y = 1$ এবং $xy = 56$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান : $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 1^2 + 4.56 = 1 + 224 = 225$

$\therefore x + y = \pm\sqrt{225} = \pm 15$.

উদাহরণ 5. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$

সমাধান : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.x.\frac{1}{x} = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$.

উদাহরণ 6. যদি $x + \frac{1}{x} = 5$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $x \neq 0$]

সমাধান : $x + \frac{1}{x} = 5$ এবং $x \neq 0$.

$$\therefore \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x\left(x+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x+1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $(a+2b)(3a+2c)$ দুইটি পূর্ণ বর্গের অন্তরফলের সমান।

সমাধান : $(a+2b)(3a+2c) = \left(\frac{a+2b+3a+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+2b-3a-2c}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{4a+2b+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2a+2b-2c}{2}\right)^2 = \left(\frac{2(2a+b+c)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2(b-a-c)}{2}\right)^2$$

$= (2a+b+c)^2 - (b-a-c)^2$.

উদাহরণ 8. $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 29$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান কত?

সমাধান : এখানে, $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$$= 9^2 - 29 = 81 - 29 = 52$$

$\therefore ab + bc + ca = \dfrac{52}{2} = 26$ ·

উদাহরণ 9. $x + y + z = 2$ এবং $xy + yz + zx = 1$ হলে,

$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

সমাধান : $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2zx + x^2$

$= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + x^2 + y^2 + z^2$

$= (x + y + z)^2 + (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 2^2 + 2^2 - 2.1$

$= 4 + 4 - 2$

$= 8 - 2 = 6.$

উদাহরণ 10. $x - \dfrac{6}{x} = 1$ হলে, $\dfrac{6}{x^2 + x + 1}$ এর মান কত?

সমাধান : $x - \dfrac{6}{x} = 1$ বা, $\dfrac{x^2 - 6}{x} = 1$ বা, $x^2 - 6 = x$

বা, $x^2 - x - 6 = 0$ বা, $(x - 3)(x + 2) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$ অথবা $x + 2 = 0$

সুতরাং, $x = 3$ অথবা, $x = -2$

$x = 3$ হলে, $\dfrac{6}{x^2 + x + 1} = \dfrac{6}{3^2 + 3 + 1} = \dfrac{6}{13}$

আবার, $x = -2$ হলে, $\dfrac{6}{x^2 + x + 1} = \dfrac{6}{(-2)^2 - 2 + 1} = \dfrac{6}{3} = 2$

উত্তর : 2 অথবা $\dfrac{6}{13}$ ·

প্রশ্নমালা 3.1

1. সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর : (i) $a + 3b$ (ii) $ab - c$ (iii) $x^2 + \frac{2}{y^2}$
(iv) $3p + 4q - 5r$ (v) $\frac{a}{2} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ (vi) 996 (vii) $ax - by - cz$

2. সরল কর :

(i) $(4x + 7y - 3z)^2 + 2(4x + 7y - 3z)(7y - 4x + 3z) + (7y - 4x + 3z)^2$

(ii) $(a - b + c)^2 - 2(b + c - a)(a - b + c) + (b + c - a)^2$

(iii) $\frac{8{\cdot}625 \times 8{\cdot}625 - 2 \times 8{\cdot}625 \times 6{\cdot}375 + 6{\cdot}375 \times 6{\cdot}375}{8{\cdot}625 - 6{\cdot}375}$

3. $64x^2 + 96xy + 37y^2$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $x = \frac{1}{8}$ এবং $y = 1$.

4. $x - \frac{1}{x} = a$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

5. $a + b = 7p$ এবং $ab = 12p^2$ হলে, $a - b$ এর মান কত?

6. $x - y = 2$ এবং $xy = 3$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

7. $x + \frac{1}{x} = 2$ হলে, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান কত?

8. যদি $x + \frac{1}{x} = 4$ হয়, তবে $\frac{1}{x^2 - 3x + 1}$ এর মান কত?

9. $x + y = 12$ এবং $x - y = 2$ হলে, (i) $x^2 + y^2$ এর মান কত? (ii) xy এর মান কত?

10. $a + b = \sqrt{3}$ এবং $a - b = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 5$

11. 45 কে দুইটি বর্গের বিয়োগফল রূপে প্রকাশ কর।

12. $x + y + z = 15$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 83$ হলে, $xy + yz + zx$ এর মান কত?

13. $x + y + z = p$ এবং $xy + yz + zx = q$ হলে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

14. $a + b + c = 10$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 38$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান কত?

15. $x - \frac{1}{x} = p$ হলে, $\frac{c}{x(x-p)}$ এর মান নির্ণয় কর।

16. দেখাও যে, $\left\{\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2$

17. দেখাও যে, $(3a + 4b)(5a + 2c)$ দুইটি পূর্ণ বর্গের অন্তরফলের সমান।

18. $p = 3 + \frac{1}{p}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^4 = 119 - \frac{1}{p^4}$

19. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

20. $x = b - c, y = c - a, z = a - b$ হলে, $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $x^2 + 8x - 20$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

ঘনসম্বলিত সূত্রাবলি

সূত্র : $(p + x)(q + x)(r + x) = pqr + (pq + qr + rp)x + (p + q + r)x^2 + x^3$

প্রমাণ : আমরা জানি, $(p + x)(q + x) = pq + (p + q)x + x^2$

সুতরাং $(p + x)(q + x)(r + x) = \{pq + (p + q)x + x^2\}(r + x)$

$= pqr + (p + q)xr + x^2r + pqx + (p + q)x^2 + x^3$

$= pqr + (pq + qr + rp)x + (p + q + r)x^2 + x^3.$

সূত্র : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

প্রমাণ : $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$

$= a.a.a + (a.a + a.a + a.a)b + (a + a + a)b^2 + b^3$

[ওপরের সূত্রে, p, q ও r এর স্থলে a এবং x এর স্থলে b বসিয়ে]

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$

বিকল্প প্রমাণ : $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

সূত্র : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

প্রমাণ : $(a - b)^3 = \{a + (-b)\}^3 = \{a + (-b)\}\{a + (-b)\}\{a + (-b)\}$

$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$

সূত্র : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

প্রমাণ : $a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 3ab(a + b)$
$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
$= (a + b)\{(a + b)^2 - 3ab\}$
$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

সূত্র : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

প্রমাণ : $a^3 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) + 3ab(a - b)$
$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
$= (a - b)\{(a - b)^2 + 3ab\}$
$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

বিকল্প প্রমাণ : $a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$
$= (a - b)\{a^2 - a(-b) + (-b)^2\}$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

উদাহরণ 1. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর : $(3 + x)(4 + x)(7 + x)$.

সমাধান : $(3 + x)(4 + x)(7 + x)$
$= 3.4.7 + (3.4 + 4.7 + 7.3)x + (3 + 4 + 7)x^2 + x^3$
$= 84 + (12 + 28 + 21)x + 14x^2 + x^3 = 84 + 61x + 14x^2 + x^3$.

উদাহরণ 2. $a + 2b$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(a + 2b)^3 = a^3 + 3a^2.2b + 3a.(2b)^2 + (2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$.

উদাহরণ 3. $p - \dfrac{1}{p}$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(p - \dfrac{1}{p}\right)^3 = p^3 - 3.p^2.\dfrac{1}{p} + 3p\left(\dfrac{1}{p}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{p}\right)^3 = p^3 - 3p + \dfrac{3}{p} - \dfrac{1}{p^3}$

উদাহরণ 4. সরল কর : $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

সমাধান : মনে করি, $a = 2x + 3y - 4z$ এবং $b = 2x - 3y + 4z$, ফলে $a + b = 4x$

প্রদত্ত রাশি $= (2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 3.(4x)\{(2x + 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)\}$
$= a^3 + b^3 + 3(a + b)ab = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$= (a + b)^3 = (4x)^3 = 64x^3$.

উদাহরণ 5. $x = 6$ হলে, $8x^3 - 72x^2 + 216x - 216$ এর মান কত?

সমাধান : $8x^3 - 72x^2 + 216x - 216 = (2x)^3 - 3(2x)^2.6 + 3.2x(6)^2 - (6)^3$
$= (2x - 6)^3 = (2.6 - 6)^3$ [$\because x = 6$]
$= (12 - 6)^3 = 6^3 = 216$.

উদাহরণ 6. $x + y + z = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y + z = 0$

বা, $x + y = -z$

সুতরাং $(x + y)^3 = (-z)^3$

বা, $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$

বা, $x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3$ $[\because x + y = -z]$

বা, $x^3 + y^3 - 3xyz = -z^3$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

উদাহরণ 7. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + \frac{1}{a^3} = 0$.

সমাধান : $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a.\frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2\left(a + \frac{1}{a}\right) - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= 3\left(a + \frac{1}{a}\right) - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)\left[\because \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3\right]$

$= 0$.

উদাহরণ 8. $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ হলে, $x^3 + y^3$ এর মান কত?

সমাধান : $\because x + y = 2$

সুতরাং, $x^2 + 2xy + y^2 = 4$

বা, $4 + 2xy = 4$

বা, $2xy = 4 - 4 = 0$

বা, $xy = 0$

$\therefore x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3.0.2 = 8$.

উদাহরণ 9. যদি $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b^2$ এবং $x^3 + y^3 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 + 2c^3 = 3ab^2$.

সমাধান : $a^3 + 2c^3 = (x + y)^3 + 2(x^3 + y^3)$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 2(x^3 + y^3)$

$= 3(x^3 + y^3) + 3xy(x + y)$

$= 3\{(x^3 + y^3) + xy(x + y)\}$

$= 3\{(x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x + y)\}$

$= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2 + xy)$

$= 3(x + y)(x^2 + y^2)$

$= 3ab^2$, $[\because x + y = a, x^2 + y^2 = b^2]$.

উদাহরণ 10. যদি $x - y = 8$ এবং $xy = 65$ হয়, তবে $x^3 - y^3 - 16(x - y)^2$ এর মান কত?

সমাধান : $x^3 - y^3 - 16(x - y)^2 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) - 16(x - y)^2$
$= 8^3 + 3.65.8 - 16.8^2 = 8(64 + 195 - 128)$
$= 8(64 + 67) = 8 \times 131 = 1048.$

উদাহরণ 11. সরল কর :
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (b - c)(b^2 + bc + c^2) + (c - a)(c^2 + ca + a^2)$

সমাধান : $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (b - c)(b^2 + bc + c^2) + (c - a)(c^2 + ca + a^2)$
$= a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3 = 0.$

প্রশ্নমালা 3.2

1. গুণফল নির্ণয় কর : (i) $(a + x)(b + x)(c + x)$ (ii) $(4 + x)(3 + x)(2 + x)$
2. ঘন নির্ণয় কর : (i) $3x - 4y$ (ii) $a - b + c$ (iii) 403
3. সরল কর :
   (i) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$
   (ii) $(4a - 3b)^3 - 3(4a - 3b)^2(2a - 3b) + 3(4a - 3b)(2a - 3b)^2 - (2a - 3b)^3$
   (iii) $(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$
4. $x = 19$ ও $y = -12$ হলে, $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।
5. $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে, $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।
6. যদি $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হয়, তবে ab এর মান কত?
7. $a + b = c$ হলে, দেখাও যে, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$
8. যদি $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হয়, তবে $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?
9. $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে, $a^3 - b^3$ এর মান কত?
10. যদি $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.
11. $x + y = 5$ এবং $xy = 6$ হলে, $x^3 + y^3 + 4(x - y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।
12. $2x - \frac{1}{3x} = 5$ হলে, $4x^2 + \frac{1}{9x^2}$ ও $8x^3 - \frac{1}{27x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।
13. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 6$ হলে, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ এর মান নির্ণয় কর।
14. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।
15. $2x - \frac{2}{x} = 3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8(x^3 - \frac{1}{x^3}) = 63.$

উৎপাদক

যদি একটি রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলে। কোনো বীজগণিতীয় রাশির সম্ভাব্য সকল উৎপাদক বের করে একে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়। ভগ্নাংশযুক্ত রাশির উৎপাদকগুলোকে বিভিন্নরূপে প্রকাশ করা যেতে পারে। যেমন,

$$a^3 + \frac{1}{8} = a^3 + \frac{1}{2^3} = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

আবার, $a^3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(8a^3 + 1) = \frac{1}{8}\{(2a)^3 + 1^3\} = \frac{1}{8}(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1).$

বীজগণিতের রাশিগুলো এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে, তাই উৎপাদকগুলোও এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে। উৎপাদক নির্ণয়ে গুণের বিনিময়, সংযোগ ও বণ্টন বিধির ব্যবহার করা হয়। গুণের বণ্টন বিধি অনুযায়ী $ka + kb + kc = k(a + b + c)$.

উদাহরণ 12. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2b^2m^2 + a^2b^2n^2 + a^2b^2p^2$

সমাধান : $a^2b^2m^2 + a^2b^2n^2 + a^2b^2p^2 = a^2b^2(m^2 + n^2 + p^2)$

[**বি: দ্র:** এখানে a^2b^2 কে a.a. b.b আকারে লেখা নিষ্প্রয়োজন]

উৎপাদকে বিশ্লেষণে $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ সূত্রটির ভূমিকা গুরুত্বপূর্ণ।

উদাহরণ 13. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2x^2 - 8y^2$

সমাধান : $2x^2 - 8y^2 = 2(x^2 - 4y^2) = 2\{x^2 - (2y)^2\} = 2(x + 2y)(x - 2y).$

উদাহরণ 14. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

সমাধান : $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 - 4x^2y^2$

$= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy)$

$= (x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণে $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ এবং $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগের উদাহরণ নিচে দেওয়া হল।

উদাহরণ 15. $x^4 + 27x$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^4 + 27x = x(x^3 + 27) = x(x^3 + 3^3)$

$= x(x + 3)(x^2 - x.3 + 3^2) = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$

উদাহরণ 16. $1 - 8a^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $1 - 8a^3 = 1^3 - (2a)^3 = (1 - 2a)\{1^2 + 1.2a + (2a)^2\}$

$= (1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2).$

প্রশ্নমালা 3.3

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $3a^2b + 6ab^2 + 12a^2b^2$
2. $a(x + 5y) + 3b(x + 5y)$
3. $ax + by + bx + ay$
4. $1 + a + b + ab$
5. $ab + a - b - 1$
6. $a^2 - c^2 - 2ab + b^2$
7. $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$
8. $(a + b - 3c)^3 - a - b + 3c$
9. $4x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$
10. $a^4 + 4$
11. $x^4 + x^2 + 25$
12. $12a^4 + 3b^4$
13. $a^2 - b^2 - 2ac + 2bc$
14. $x^4 + 2x^2 + 9$
15. $a^4 - 27a^2 + 1$
16. $2ab - a^2 - b^2 + c^2$
17. $a^2 - 1 + 2b - b^2$
18. $(R - 2r)^2 - r^2$
19. $a^3 + 8$
20. $m^4 - 8m$
21. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
22. $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$
23. $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$
24. $m^3 - n^3 - m(m^2 - n^2) + n(m - n)^2$
25. $ay + a - y^2 - 2y - 1$
26. $\sqrt{2}x + 2x^2$
27. $x^3 + 3\sqrt{3}$
28. $AR^3 - Ar^3 + AR^2h - Ar^2h$
29. $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$ [Hints : প্রদত্ত রাশি = $x^2 - a^2 + 2x - 2a + x + a + 2$]
30. $x(x + 3)(x + 4)(x - 1) + 4$
31. $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
32. $4\pi(R + r)^3 - 4\pi R^3$
33. $\frac{1}{2}m(v + 2u)^2 - \frac{1}{2}m(v + u)^2$
34. $2\sqrt{2}x^3 + 125$

$x^2 + px + q$ আকারের রাশির উৎপাদক

$$x^2 + (a + b)\,x + ab = x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x\,(x + a) + b\,(x + a) = (x + a)\,(x + b)$$

এ থেকে দেখা যায় যে,

$x^2 + px + q = (x + a)\,(x + b)$ হবে যদি a ও b এমন হয় যে, $q = ab$ এবং $p = a + b$

সুতরাং, $x^2 + px + q$ রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য x বর্জিত পদ q কে এমন দুইটি সংখ্যা a ও b এর গুণফলরূপে প্রকাশ করা হয় যাদের (বীজগাণিতিক) যোগফল $a + b$, x এর সহগের সমান হয়।

এক্ষেত্রে, (ক) $q > 0, p > 0$ হলে, a ও b উভয়ই ধনাত্মক হবে।

(খ) $q > 0, p < 0$ হলে, a ও b উভয়ই ঋণাত্মক হবে।

(গ) $q < 0, p > 0$ হলে, a ও b এর মধ্যে বড়টি ধনাত্মক ও ছোটটি ঋণাত্মক হবে।

(ঘ) $q < 0, p < 0$ হলে, a ও b এর মধ্যে বড়টি ঋণাত্মক ও ছোটটি ধনাত্মক হবে।

উল্লেখ্য যে, বিবেচনাধীন দ্বিঘাত রাশিটিতে x^2 এর সহগ 1.

উদাহরণ 17. $x^2 - x - 12$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের গুণফল -12 এবং যোগফল (বীজগাণিতিক) -1. এমন দুইটি সংখ্যা হচ্ছে -4 এবং 3. সুতরাং

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)\,(x + 3).$$

ব্যাখ্যা: $x^2 - x - 12 = x^2 + (-1)x + (-12)$. এখানে, $p = -1, q = -12$

উদাহরণ 18. $x^4 + x^2 - 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^4 + x^2 - 20 = x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20$

$$= x^2\,(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5) = (x^2 + 5)\,(x^2 - 4)$$
$$= (x^2 + 5)\,(x^2 - 2^2) = (x^2 + 5)\,(x + 2)\,(x - 2)$$

উদাহরণ 19. $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) - 40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : মনে করি, $x^2 - x = a$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 3a - 40 = a^2 + 8a - 5a - 40$

$$= a(a + 8) - 5\,(a + 8) = (a + 8)\,(a - 5)$$

$= (x^2 - x + 8)\,(x^2 - x - 5)$, [a এর মান বসিয়ে]

উদাহরণ 20. $x^2 - x - (a + 1)\,(a + 2)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : মনে করি, $a + 1 = y$. ফলে $a + 2 = y + 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^2 - x - y(y + 1) = x^2 - x - y^2 - y = x^2 - y^2 - x - y$

$$= (x + y)\,(x - y) - (x + y) = (x + y)\,(x - y - 1)$$

$= (x + a + 1)\,(x - a - 1 - 1)$, [y এর মান বসিয়ে]

$$= (x + a + 1)\,(x - a - 2)$$

বিকল্প পদ্ধতি : $x^2 - x - (a + 1)\,(a + 2)$

$$= x^2 - (a + 2)\,x + (a + 1)x - (a + 1)\,(a + 2)$$
$$= x\,(x - a - 2) + (a + 1)\,(x - a - 2)$$
$$= (x - a - 2)\,(x + a + 1)$$

প্রশ্নমালা 3.4

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2 + x - 20$
2. $x^2 - 8x - 20$
3. $x^2 - 12x + 20$
4. $x^2 - 19x - 20$
5. $x^2 - 21x + 20$
6. $y^2 + 2y - 3$
7. $u^2 - 30u + 216$
8. $a^4 + 4a^2 - 5$
9. $x^4 - 10x^2 + 16$
10. $x^6 - 7x^3 + 12$
11. $x^6y^6 - x^3y^3 - 6$
12. $a^8 - a^4 - 2$
13. $(x + y)^2 - 4(x + y) - 12$
14. $(x^2 + 2x)^2 + 12(x^2 + 2x) - 45$
15. $y^2 - 2ay + (a + b)(a - b)$
16. $x^2 - x - (a^2 + 5a + 6)$
17. $x^2 - (a + \frac{1}{a})x + 1$
18. $x^2 - (\frac{2}{a} - 3a)x - 6$
19. $x^2 + x - (a + 1)(a + 2)$
20. $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 15x$

$px^2 + qx + r$ আকারের রাশির উৎপাদক

যদি $px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd$ হয়,
তবে $p = ac$, $q = bc + ad$, $r = bd$
ফলে $p \times r = ac \times bd = bc \times ad$
দেখা যাচ্ছে যে, $px^2 + qx + r$ এর উৎপাদক $(ax + b)(cx + d)$
যেখানে $pr = bc \times ad$ এবং $q = bc + ad$. অতএব, $px^2 + qx + r$ আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে pr এর (অর্থাৎ, x^2 এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলের) এমন দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করতে হবে যাদের বীজগণিতীয় যোগফল q এর সমান হবে।

উদাহরণ 21. $3x^2 + 7x + 4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $3x^2 + 7x + 4 = 3x^2 + 3x + 4x + 4$
$= 3x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(3x + 4)$

উদাহরণ 22. $3k^2 - 22k - 25$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $3k^2 - 22k - 25 = 3k^2 + 3k - 25k - 25$
$= 3k(k + 1) - 25(k + 1) = (k + 1)(3k - 25)$

উদাহরণ 23. $x^2y^2 - xy - 72$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^2y^2 - xy - 72 = x^2y^2 - 9xy + 8xy - 72$
$= xy(xy - 9) + 8(xy - 9) = (xy - 9)(xy + 8)$

উদাহরণ 24. $4x^4 - 25x^2 + 36$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $4x^4 - 25x^2 + 36 = 4x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 36$

$= 4x^2(x^2 - 4) - 9(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(4x^2 - 9)$

$= (x^2 - 2^2)\{(2x)^2 - 3^2\} = (x + 2)(x - 2)(2x + 3)(2x - 3).$

উদাহরণ 25. $3(a^2 + 2a)^2 - 22(a^2 + 2a) + 40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $3(a^2 + 2a)^2 - 22(a^2 + 2a) + 40$

$= 3x^2 - 22x + 40$ [$a^2 + 2a = x$ ধরে]

$= 3x^2 - 10x - 12x + 40 = x(3x - 10) - 4(3x - 10)$

$= (3x - 10)(x - 4)$

$= \{3(a^2 + 2a) - 10\}(a^2 + 2a - 4)$ [x এর মান বসিয়ে]

$= (3a^2 + 6a - 10)(a^2 + 2a - 4).$

উদাহরণ 26. $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $ax^2 + (a^2 + 1)x + a = ax^2 + a^2x + x + a$

$= ax(x + a) + 1(x + a) = (x + a)(ax + 1)$

প্রশ্নমালা 3.5

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $4a^2 + 11a + 6$
2. $7p^2 - p - 8$
3. $35x^2 - x - 12$
4. $5(x + y)^2 + 18(x^2 - y^2) - 8(x - y)^2$
5. $(a + b)x^2 - 2ax + (a - b)$
6. $(a - 1)x^2 + a^2xy + (a + 1)y^2$
7. $19x - 6 + 7x^2$
8. $6p^2 - 11p - 150$
9. $4(x + 1)(2x + 3)(3x + 2)(6x + 1) - 6$
10. $(a - m)x^2 - (x - a)xy + (m - x)y^2$
11. $\frac{1}{2}p^2 - 3p + 4$
12. $3y^2 + 11y + 6$
13. $4x^2 + 5x - 6$
14. $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) - 15$
15. $(x + 1)(x + 3)(x - 4)(x - 6) + 24.$

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

ফাংশন : ফাংশনের ধারণা উচ্চতর গণিতের প্রাণস্বরূপ। একটি উদাহরণ দিলে ধারণাটি পরিষ্কার হবে। মনে করি, তোমাদের শ্রেণীতে ছাত্র সংখ্যা 40 এবং প্রত্যেক ছাত্র 6টি করে বই নিয়ে আসে। আগামী শনিবার তোমাদের ক্লাসে মোট কতটি বই আসবে তুমি বলতে পারবে কি? উত্তর "না", কারণ ঐদিন কত জন ছাত্র আসবে তুমি বলতে পারছ না। 30 জন ছাত্র আসলে বইয়ের সংখ্যা হবে $30 \times 6 = 180$. আবার 23 জন ছাত্র আসলে বইয়ের সংখ্যা হবে $23 \times 6 = 138$. উত্তর নির্ভর করছে ছাত্রের উপস্থিতির ওপর। উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা x ধরলে বইয়ের সংখ্যা হবে 6x. এখানে x এর মান শূন্য থেকে 40 এর মধ্যে যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে। $y = 6x$ ধরলে, x এর এরূপ প্রত্যেক মানের জন্য y এর মান শূন্য থেকে 240 পর্যন্ত কোনো একটি সংখ্যা হবে।

এখানে x এর প্রত্যেক মানের জন্য y এর একটি ও একটি মাত্র মান পাওয়া যায়। এমতাবস্থায় y কে x এর ফাংশন বলা হয় এবং $y = f(x)$ বা $y = g(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা উক্ত নির্ভরশীলতা বোঝানো হয়। x কে স্বাধীন চল এবং y কে অধীন চল বলা হয়। আরেকটি উদাহরণ :

x যদি যেকোনো সংখ্যা এবং y তার বর্গ হয়, তবে y, x এর একটি ফাংশন। আমরা লিখতে পারি, $y = x^2$. x এর ওপর y এর নির্ভরশীলতাই ফাংশনের ধারণার মূল কথা। সাধারণত স্বাধীন চলকে x দ্বারা এবং ফাংশনের সংশ্লিষ্ট মানকে $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। তখন $f(x)$, $g(x)$ ইত্যাদিকে ফাংশনের প্রতীক বলে উল্লেখ করা হয়। যেমন, $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2$ হলে, x এর যেকোনো নির্দিষ্ট মান নিয়ে সূত্র হতে সংশ্লিষ্ট ফাংশনের মান আমরা বের করতে পারি। যেমন, ওপরের উদাহরণে $x = 5$ হলে, $f(5) = 3.5 - 1 = 14$. $g(5) = 5^2 = 25$

বহুপদী : $a \neq 0$ হলে, $ax + b$ একটি সরল (বা একমাত্রিক) বহুপদী; $ax^2 + bx + c$ একটি দ্বিঘাত (বা দ্বিমাত্রিক) বহুপদী; $ax^3 + bx^2 + cx + d$ একটি ত্রিঘাত (বা ত্রিমাত্রিক) বহুপদী। যেকোনো বহুপদীর সাংখ্যমান x এর মানের ওপর নির্ভর করে বিধায় আমরা একে x এর ফাংশন হিসেবে বিবেচনা করতে পারি। সুতরাং যেকোনো মাত্রার একটি বহুপদী বোঝাতে আমরা ফাংশনের প্রতীক $f(x)$ ব্যবহার করতে পারি। x কে অনির্দেশকও বলা হয়।

কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $x - a$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হল ভাগশেষ উপপাদ্য। ভাজক বহুপদী $(x - a)$ এর মাত্রা 1. ভাজক বহুপদী যদি ভাজ্য বহুপদীর উৎপাদক হয় তবে ভাগশেষ হবে শূন্য, আর যদি উৎপাদক না হয় তবে ভাগশেষ হবে অশূন্য কোনো সংখ্যা। উভয় ক্ষেত্রেই ভাগফলকে $h(x)$ এবং ভাগশেষকে r দ্বারা সূচিত করে পাই,

$f(x) = (x - a).\, h(x) + r$

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাই, $f(a) = (a - a).\, h(a) + r = 0.\, h(a) + r = 0 + r = r$

সুতরাং, $r = f(a)$.

অতএব দেখা যায় যে,

$f(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$. এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য নামে পরিচিত।

কোনো বহুপদী $f(x)$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত : $a \neq 0$ হলে, $ax + b$ রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়।

প্রমাণ : $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি এবং কেবল যদি $x + \frac{b}{a} = x - \left(-\frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হয়; অর্থাৎ, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়।

উৎপাদক নির্ণয়ে ভাগশেষ উপপাদ্যের প্রয়োগ

$x - a$ রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি $f(x) = 0$ হয়। সাধারণভাবে, $ax + b$ রাশিটি $f(x)$এর উৎপাদক হবে যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়। এই ফল ব্যবহার করে তিন বা তদূর্ধ্ব মাত্রায় বহুপদীর সরল উৎপাদক (যদি থাকে) নির্ণয় করা যায়। বহুপদীর সকল সহগ পূর্ণ সংখ্যা বলে ধরা হবে। যদি বহুপদীটিতে অনির্দেশকের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ 1 হয়, তবে এর যেকোনো সরল উৎপাদক $x - a$ আকারের হবে, যেখানে a পূর্ণ সংখ্যা এবং বহুপদীটির ধ্রুব পদের উৎপাদক। যদি সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ 1 না হয়, তবে যেকোনো সরল উৎপাদক $ax + b$ আকারের হবে যেখানে a ও b পূর্ণ সংখ্যা, a সর্বোচ্চ ঘাতের সহগের উৎপাদক এবং b ধ্রুব পদের উৎপাদক। লক্ষণীয় যে, a বা b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে শূন্যায়ন পদ্ধতিও (Vanishing method) বলা হয়।

উদাহরণ 27. $x^3 - x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে $f(x) = x^3 - x - 6$ একটি বহুপদী; এর ধ্রুবপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6

$x = 1, -1$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।

$x = 2$ বসিয়ে দেখি, $f(2) = 2^3 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$

অতএব, $x - 2$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$f(x)$ এর অপরাপর উৎপাদক দুইভাবে নির্ণয় করা যায়:

(i) $f(x)$ কে নির্ণীত উৎপাদক দ্বারা সরাসরি ভাগ করে;

(ii) $f(x)$ এর পদগুলোকে সুবিধাজনকভাবে পুনর্বিন্যাস ও গুচ্ছবন্ধ করে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি অধিকতর আকর্ষণীয়।

ওপরের উদাহরণে $f(x) = x^3 - x - 6 = x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 3(x - 2)$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

বি: দ্রঃ যেহেতু $x^2 + 2x + 3$ কে পূর্ণ সংখ্যাদলে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না, সেহেতু প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্পন্ন হয়েছে।

উদাহরণ 28. $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, x কে অনির্দেশক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করে।

ধরি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

তাহলে, $f(-y) = (-y)^3 - 7(-y)y^2 - 6y^3 = -y^3 + 7y^3 - 6y^3 = 0$

$\therefore x - (-y) = x + y$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখানে $x^3 - 7xy^2 - 6y^3 = x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$

$$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2) = (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$$

$$= (x + y)\{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\} = (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$$

উদাহরণ 29. $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : মনে করি, $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = 54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4 + 27\left(-\frac{1}{2}a\right)^3 a - 16\left(-\frac{1}{2}a\right) - 8a$

$$= \frac{27}{8}a^4 - \frac{27}{8}a^4 + 8a - 8a = 0$$

$\therefore\ x - \left(-\frac{1}{2}a\right) = x + \frac{1}{2}a$, অর্থাৎ $2x + a$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a = 27x^3(2x + a) - 8(2x + a) = (2x + a)(27x^3 - 8)$

$= (2x + a)\{(3x)^3 - 2^3\} = (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4).$

প্রশ্নমালা 3.6

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^3 - 21a - 20$
2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
3. $a^3 - 3a^2b + 2b^3$
4. $x^3 + 3x + 36$
5. $a^4 - 4a + 3$
6. $2a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
7. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
8. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$
9. $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
10. $12 + 4x - 3x^2 - x^3$
11. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$
12. $3a^3 + 2a + 5$

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

তোমরা নিচের শ্রেণীতে গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করার পদ্ধতি শিখেছ। এখানে সংক্ষিপ্ত আকারে পুনরালোচনা করা হল।

গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী : গুণনীয়ক বা উৎপাদকের সাহায্যে এবং ভাগ প্রণালীর সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

গুণনীয়কের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী আলোচিত হল।

প্রদত্ত রাশিগুলোর সংখ্যাবাচক সহগগুলোর পাটিগণিতীয় গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম অনুসারে গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়। তারপর অবশিষ্ট অংশগুলোর সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক বের করে গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়। এখন সহগগুলোর গ. সা. গু. এবং অবশিষ্টাংশের গ. সা গু.-র গুণফলই প্রদত্ত রাশিগুলোর নির্ণেয় গ. সা. গু.।

উদাহরণ 30. $3x^2y + 6xy^2$, $9x^4y^2 - 36x^2y^4$ এবং $9x^2y^2(x^2 + 6xy + 8y^2)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $3x^2y + 6xy^2 = 3xy(x + 2y)$

২য় রাশি = $9x^4y^2 - 36x^2y^4 = 9x^2y^2(x^2 - 4y^2) = 9x^2y^2(x + 2y)(x - 2y)$

৩য় রাশি = $9x^2y^2(x^2 + 6xy + 8y^2) = 9x^2y^2(x^2 + 4xy + 2xy + 8y^2)$

$= 9x^2y^2\{x(x + 4y) + 2y(x + 4y)\} = 9x^2y^2(x + 4y)(x + 2y)$

এখানে (i) 3, 9 এবং 9 এর গ. সা. গু. = 3; (ii) xy, x^2y^2 এবং x^2y^2 এর গ. সা. গু. = xy;

(iii) $(x + 2y)$, $(x + 2y)(x - 2y)$ এবং $(x + 4y)(x + 2y)$ এর গ. সা. গু. = $x + 2y$.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $3xy(x + 2y)$.

মন্তব্য : গ. সা. গু. নির্ণয়ে কোনো রাশির ± 1 গুণনীয়ক বিবেচনা করা হয় না। যেমন, 6 এবং 8 এর গ. সা. গু. = 2. আবার -6 এবং -8 এর গ. সা. গু. ও 2. ল. সা. গু. এর ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য।

উদাহরণ 31. $x^3 - x - 24$ এবং $x^3 - 6x^2 + 18x - 27$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $x^3 - x - 24 = x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 8(x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 + 3x + 8)$ [ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে]

২য় রাশি = $x^3 - 6x^2 + 18x - 27 = x^2(x - 3) - 3x(x - 3) + 9(x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 - 3x + 9)$ [ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $(x - 3)$.

বি: দ্র: একথা সত্য যে, দুইটি বীজগাণিতিক রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. র গুণফল রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান (যদি সবক্ষেত্রে $\pm$ চিহ্ন একই রকম ধরা হয়)। কিন্তু বীজগাণিতিক রাশির অক্ষর প্রতীকের বিশেষ বিশেষ সাংখ্যমানের জন্য সংশ্লিষ্ট সংখ্যাগুলোর পাটিগণিতীয় গ. সা. গু. (বা ল. সা. গু.) ঐ রাশিদ্বয়ের বীজগণিতীয় গ. সা. গু. (বা ল. সা. গু.) এর সমান নাও হতে পারে। যেমন, $(x + y)^2$, $x^2 - y^2$ এর গ. সা. গু. $x + y$. কিন্তু $x = 6$, $y = 4$, নিলে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের গ. সা. গু. হয় 20 (যা কিনা $x + y$ এর সাংখ্যমানের দ্বিগুণ)।

ল. সা. গু. নির্ণয় : প্রথমে প্রদত্ত রাশিগুলোর সংখ্যাবাচক সহগগুলোর ল. সা. গু. নির্ণয় করা হয়। তারপর অবশিষ্টাংশের সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদক বের করে ল. সা. গু. নির্ণয় করা হয়। এখন সহগগুলোর ল. সা. গু. এবং অবশিষ্টাংশের সম্ভাব্য সাধারণ উৎপাদকের ল. সা. গু.–র গুণফলই প্রদত্ত রাশিগুলোর নির্ণেয় ল. সা. গু.।

উদাহরণ 32. $2a^2b + 4ab^2$, $4a^3b - 16ab^3$ এবং $5a^3b^2(a^2 + 4ab + 4b^2)$ এর ল. সা. গু . নির্ণয় কর।

সমাধান :

১ম রাশি = $2a^2b + 4ab^2 = 2ab(a + 2b)$;

২য় রাশি = $4a^3b - 16ab^3 = 4ab(a^2 - 4b^2) = 4ab(a + 2b)(a - 2b)$;

৩য় রাশি = $5a^3b^2(a^2 + 4ab + 4b^2) = 5a^3b^2(a + 2b)^2$

2, 4 এবং 5 এর ল. সা. গু. = 20

অন্য রাশিগুলো $ab(a + 2b)$, $ab(a + 2b)(a - 2b)$ এবং $a^3b^2(a + 2b)^2$ এর

ল. সা. গু. = $a^3b^2(a + 2b)^2(a - 2b)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. = $20a^3b^2(a + 2b)^2(a - 2b)$

প্রশ্নমালা 3.7

গ. সা. গু. নির্ণয় কর (প্রশ্ন 1 থেকে 4) :

1. $x^2 + x, x^2 + 2x + 1$
2. $a^3 - b^3, a^3 + b^3$
3. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc, b^2 - c^2 - a^2 - 2ca, c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
4. $x^2 - 11x + 30, x^3 - 4x^2 - 2x - 15$

ল. সা. গু. নির্ণয় কর (প্রশ্ন 5 থেকে 10) :

5. $x^2 + 3x + 2, x^2 - 1, x^2 + x - 2$
6. $x^3 - 1, x^3 + 1, x^4 + x^2 + 1$
7. $x^2 - x(a - c) - ac, x^2 - x(a + c) + ac, ax^3 - a^3x$
8. $x^3 - x^2 - 3x - 9, x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
9. $4x^2 + 8x - 12, 9x^2 - 9x - 54, 6x^4 - 30x^2 + 24$
10. $x(4 - x^2), x^4 + 6x^3 + 8x^2, x^2 + 2x - 8$
11. যদি $x^2 + px + q$ এবং $x^2 + p'x + q'$ এর গ. সা. গু. $(x + a)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(p - p')a = q - q'$.

বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ

লক্ষ কর :

ক) জন প্রতি দেয় বা প্রাপ্য q টাকা হলে, n জনের দেয় বা প্রাপ্য $A = qn$ টাকা।

খ) দৈনিক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ q হলে, d দিনে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ $W = qd$।

গ) গতিবেগ ঘণ্টায় q মিটার হলে, t ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব $D = qt$ মিটার।

ঘ) $q\%$ বৃদ্ধিতে / হ্রাসে a এর বর্ধিত / হ্রাসকৃত মান $A = a \pm a \left(\frac{q}{100}\right) = a\left(1 \pm \frac{q}{100}\right)$

(বৃদ্ধির ক্ষেত্রে + চিহ্ন ও হ্রাসের ক্ষেত্রে – চিহ্ন প্রযোজ্য)

ঙ) একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফা r টাকা হলে, p টাকা বিনিয়োগে n সময়ান্তে মুনাফা I ও সবৃদ্ধি মূলধন A হবে যেখানে,

(১) সরল মুনাফার ক্ষেত্রে

$I = Pnr$ টাকা

$A = P + I = P(1 + nr)$ টাকা

(২) চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে (যখন প্রতি একক সময়ান্তে মুনাফা মূলধনের সঙ্গে যুক্ত হয়)

$A = P(1 + r)^n$ টাকা

[উল্লেখ্য যে, বছরান্তে মুনাফা মূলধনের সঙ্গে যুক্ত হলে,

শুরুতে মূলধন $P_0 = P$

প্রথম বছরান্তে মূলধন $P_1 = P_0 + P_0r = P_0(1 + r) = P(1 + r)$

দ্বিতীয় বছরান্তে মূলধন $P_2 = P_1 + P_1r = P_1(1 + r) = P(1+ r)^2$

তৃতীয় বছরান্তে মূলধন $P_3 = P_2 + P_2r = P_2(1 + r) = P(1+ r)^3$

এবং এভাবে,

n তম বছরান্তে মূলধন $A = P(1 + r)^n$]

চ) চৌবাচ্চায় একক সময়ে p লিটার পানি প্রবেশ করলে এবং q লিটার পানি বের হলে t সময়ে মোট pt লিটার পানি প্রবেশ করে এবং qt পানি বের হয়ে যায়। সুতরাং শুরুতে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ Q_0 লিটার হলে t সময়ান্তে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ $Q_t = (Q_o + pt - qt)$ লিটার।

উদাহরণ 33. জন প্রতি বাস ভাড়া q টাকা হলে, n জনের মোট বাস ভাড়া কত হবে?
বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5,700 টাকায় বাস ভাড়া করা হয় এই শর্তে যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

সমাধান : জন প্রতি বাস ভাড়া q টাকা হলে, n জনের মোট বাস ভাড়া $A = qn$ টাকা হবে।
মনে করি, আগ্রহী যাত্রী সংখ্যা x । তাহলে,

	যাত্রী সংখ্যা	জন প্রতি ভাড়া	মোট ভাড়া
আগ্রহী	x	q	qx
প্রকৃত	$x-5$	$q+3$	$(q+3)(x-5)$

প্রশ্নানুসারে , $qx = (q+3)(x-5) = 5700$

$qx = (q+3)(x-5)$ থেকে পাই,

$qx = qx - 5q + 3x - 15$

বা, $5q = 3(x-5)$

বা, $q = \frac{3}{5}(x-5)$

ফলে $qx = 5700$ থেকে পাই, $\frac{3}{5}(x-5)x = 5700$

বা, $(x-5)x = 5700 \times \frac{5}{3} = 9500$

বা, $x^2 - 5x - 9500 = 0$

বা, $(x-100)(x+95) = 0$

যেহেতু যাত্রী সংখ্যা x ধনাত্মক, সুতরাং $x + 95 \neq 0$.

অতএব, $x - 100 = 0$ অর্থাৎ $x = 100$

$\therefore$ প্রকৃত যাত্রী সংখ্যা $= x - 5 = 100 - 5 = 95$.

উদাহরণ 34. রেজা ও সুজন একত্রে একটি কাজ x দিনে করতে পারে। সুজন একা কাজটি y দিনে করতে পারে। রেজা একাকী কত দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?

সমাধান : মনে করি, রেজা d দিনে কাজটি করতে পারে
এবং রেজার দৈনিক কাজের পরিমাণ $= r$
ও সুজনের দৈনিক কাজের পরিমাণ $= s$
তাহলে,

	কাজের দিন	মোট কাজ
রেজা	x	rx
সুজন	x	sx
সুজন	y	sy
রেজা	d	rd

প্রশ্নানুসারে, $rx + sx = sy = rd = 1$

$rx + sx = 1$ থেকে পাই, $r + s = \frac{1}{x}$

$sy = 1$ থেকে পাই, $s = \frac{1}{y}$

$\therefore r = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$

তাহলে, $rd = 1$ থেকে পাই, $d = \frac{1}{r} = \frac{xy}{y-x}$

$\therefore$ রেজা $\frac{xy}{y-x}$ দিনে কাজটি করতে পারবে।

উদাহরণ 35. এক মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় x কি. মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান : মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় b কি. মি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় c কি. মি.

তাহলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(b+c)$ কি. মি.

এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(b-c)$ কি. মি.

যেহেতু অতিক্রান্ত দূরত্ব = বেগ × সময়, সুতরাং

$$x = (b-c)\,p$$
$$x = (b+c)\,q$$

তাহলে, $b + c = \frac{x}{q}$ .... (i)

$b - c = \frac{x}{p}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2b = \frac{x}{q} + \frac{x}{p} = x\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)$

বা, $b = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই, $2c = \frac{x}{q} - \frac{x}{p} = x\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

বা, $c = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

$\therefore$ স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ কি. মি.

এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)$ কি. মি.।

উদাহরণ 36. টেলিফোনের কলের সংখ্যা n, প্রতিকলের মূল্য p টাকা , তার ভাড়া r টাকা এবং ভ্যাট $x\%$ হলে, ভ্যাটের ও টেলিফোনের বিলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান : তার ভাড়া ও কলের মূল্য বাবদ প্রদেয় $(r + np)$ টাকা।

$\therefore$ ভ্যাটের পরিমাণ $= (r+np)\left(\frac{x}{100}\right)$ টাকা।

$\therefore$ বিলের পরিমাণ $= \left((r+np) + (r+np)\frac{x}{100}\right)$ টাকা $= (r+np)\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ টাকা।

উদাহরণ 37. মতিনের বেতন জলিলের বেতন অপেক্ষা $x\%$ বেশি। ফলে জলিলের বেতন মতিনের বেতন অপেক্ষা $y\%$ কম। y কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, মতিনের বেতন m টাকা এবং জলিলের বেতন j টাকা।

তাহলে প্রশ্নানুসারে ,

$$m = j + j \text{ এর } x\% = j + \frac{jx}{100} = j\left(1+\frac{x}{100}\right)$$

$$j = m - m \text{ এর } y\% = m - \frac{my}{100} = m\left(1-\frac{y}{100}\right)$$

$$\therefore\ m = m\left(1-\frac{y}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$$

বা, $1 = \left(1-\frac{y}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$

বা, $1 - \frac{y}{100} = \frac{1}{1+\frac{x}{100}} = \frac{100}{100+x}$

বা, $\frac{y}{100} = 1 - \frac{100}{100+x} = \frac{x}{100+x}$

$$\therefore\ y = \frac{100x}{100+x}.$$

উদাহরণ 38. বিক্রয়মূল্যের উপর $t\%$ বিক্রয় কর প্রদেয় হলে এবং বিক্রেতা $r\%$ লাভ করতে ইচ্ছুক হলে, যে দ্রব্যের ক্রয়মূল্য a টাকা, তার উপর বিক্রয় কর এবং করসহ বিক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

সমাধান : $r\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য b = ক্রয় মূল্য + ক্রয়মূল্যের $r\%$

$$= a + a \times \frac{r}{100} \text{ টাকা} = a\left(1+\frac{r}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$t\%$ হারে বিক্রয় কর s = বিক্রয়মূল্যের $t\%$

$$= b \times \frac{t}{100} = a\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{t}{100} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{at(100+r)}{10000} \text{ টাকা।}$$

$\therefore$ করসহ বিক্রয়মূল্য = বিক্রয়মূল্য + বিক্রয় কর

$$= b + b \times \frac{t}{100} \text{ টাকা} = b\left(1+\frac{t}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$$= a\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{t}{100}\right) = \frac{a(100+r)(100+t)}{10000} \text{ টাকা।}$$

উদাহরণ 39. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি m মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা n মিনিটে খালি হয়। নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে $n > m$ ধর্তব্য)

সমাধান : মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে p লিটার পানি প্রবেশ করে ও দ্বিতীয় নল দ্বারা প্রতি মিনিটে q লিটার পানি বের হয় এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট v লিটার পানি ধরে।

মনে করি, নল দুইটি একত্রে খোলা থাকলে খালি চৌবাচ্চা t মিনিটে পূর্ণ হয়।
১ম নল দ্বারা m মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়।
$\therefore\ v = pm$ ------ (i)
২য় নল দ্বারা n মিনিটে পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি হয়।
$\therefore\ 0 = v - qn$ বা, $v = qn$ ------ (ii)
দুইটি নল দ্বারা t মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়।
$\therefore\ v = pt - qt$ বা, $v = (p - q)\,t$ ------ (iii)

(i) থেকে, $p = \dfrac{v}{m}$

(ii) থেকে, $q = \dfrac{v}{n}$

$\therefore$ (iii) থেকে, $v = \left(\dfrac{v}{m} - \dfrac{v}{n}\right) t$

বা, $1 = \left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right) t = \dfrac{n - m}{mn}\, t$

$\therefore\ t = \dfrac{mn}{n - m}$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= \dfrac{mn}{n - m}$ মিনিট।

উদাহরণ 40. ক ও খ এই দুই স্থানের দূরত্ব d কি. মি.। একই সময় মিজান ও মুজিব যথাক্রমে ক ও খ থেকে পরস্পরের দিকে রওয়ানা হয়ে t ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হল। মিলিত হওয়ার s ঘণ্টা পরে মিজান খ তে পৌঁছাল। উভয়ের গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিজানের গতিবেগ ঘণ্টায় u কি. মি. ও মুজিবের গতিবেগ ঘণ্টায় v কি. মি. এবং তারা গ স্থানে মিলিত হয়। তাহলে,

	গতিবেগ	সময়	অতিক্রান্ত দূরত্ব
মিজান	u	t	ক গ $= ut$
মুজিব	v	t	খ গ $= vt$
মিজান	u	s	গ খ $= us$

প্রশ্নানুসারে, $ut + vt = d$
$ut + us = d$

অর্থাৎ, $(u + v)\,t = d$ -------- (i)
$u\,(t + s) = d$ --------- (ii)

(ii) থেকে, $u = \dfrac{d}{t + s}$

এবং (i) থেকে, $u + v = \dfrac{d}{t}$

$\therefore\ v = \dfrac{d}{t} - \dfrac{d}{t + s} = d\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + s}\right) = \dfrac{ds}{t\,(t + s)}$

$\therefore$ মিজানের গতিবেগ ঘণ্টায় $\dfrac{d}{t + s}$ কি. মি. এবং মুজিবের গতিবেগ ঘণ্টায় $\dfrac{ds}{t\,(t + s)}$ কি. মি.।

উদাহরণ 41. একটি নৌকার ক্রয়মূল্য m টাকা; নৌকাটি কত মূল্যে বিক্রি করলে $q\%$ লাভ হবে তা সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। $m = 3600$ এবং $q = 40$ হলে, সূত্র প্রয়োগ করে বিক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বিক্রয়মূল্য = s টাকা।

মোট লাভ = ক্রয়মূল্যের $q\% = m \times \frac{q}{100}$ টাকা

এখন, বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + লাভ।

সুতরাং, $s = m + \frac{mq}{100} = m\left(1 + \frac{q}{100}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সূত্র, বিক্রয়মূল্য $= m\left(1 + \frac{q}{100}\right)$ টাকা

$m = 3600$ এবং $q = 40$ হলে, সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

বিক্রয়মূল্য $= 3600\left(1 + \frac{40}{100}\right)$ টাকা $= \left(3600 \times \frac{140}{100}\right)$ টাকা $= 5040$ টাকা।

উদাহরণ 42. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার মুনাফায় 750 টাকার 4 বছরের মুনাফা কত?

সমাধান : জানা আছে, $I = Pnr$, যেখানে $r = s\%$

এখানে, $P = 750, n = 4, s = 5 \quad \therefore r = \frac{5}{100}$

$\therefore I = Pnr = 750 \times 4 \times \frac{5}{100} = 150$

উত্তর: মুনাফা 150 টাকা।

উদাহরণ 43. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 15 বছরে সবৃদ্ধিমূল 1040 টাকা হবে?

সমাধান : জানা আছে, $S = P(1 + nr)$

এখানে, P (টাকা) = মূলধন, n (বছর) = 15, s (টাকা) = 4 $\therefore$ r (টাকা) $= \frac{4}{100}$

দেওয়া আছে, S (টাকা) = 1040

প্রশ্নমতে, $1040 = P\left(1 + 15 \times \frac{4}{100}\right) = P \times \frac{8}{5} \quad \therefore P = \frac{1040 \times 5}{8} = 650$

উত্তর: মূলধন 650 টাকা।

উদাহরণ 44. বার্ষিক শতকরা 5 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 1000 টাকা 2 বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান : জানা আছে, $C = P(1 + r)^n$ [যেখানে C চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল]

দেওয়া আছে, $P = 1000, \quad r = \frac{5}{100}, \quad n = 2$

$$\therefore C = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 1000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 1102\cdot50$$

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল $= 1102\cdot50$ টাকা।

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= (1102\cdot50 - 1000)$ টাকা $= 102\cdot50$ টাকা।

প্রশ্নমালা 3.8

1. শতকরা বার্ষিক 3·50 টাকা হার মুনাফায় 350 টাকার 4 বছরের মুনাফা কত?
2. একটি দ্রব্যের ক্রয়মূল্য C টাকা, লাভ $r\%$ হলে, বিক্রয়মূল্য কত?
3. একটি ছাগল p টাকায় বিক্রয় করলে $x\%$ লাভ হয়, ছাগলটির ক্রয়মূল্য কত?
4. x টাকার $x\%$ হার সরল মুনাফায় 4 বছরে মুনাফা x টাকা হলে, x এর মান নির্ণয় কর।
5. কোনো শহরের লোকসংখ্যা 70 লক্ষ। ঐ শহরে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতি হাজারে 30 হলে, 3 বছর পরে ঐ শহরের লোকসংখ্যা কত হবে? [এক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সূত্র প্রযোজ্য]
6. 5% হার মুনাফায় 500 টাকায় 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত?
7. 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত?
8. এক বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূল 650 টাকা এবং দুই বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূল 676 টাকা হলে, মূলধন কত?
9. 5 টাকায় 2টি করে কমলা কিনে 35 টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করলে $x\%$ লাভ হবে?
10. একটি খাসি $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায় $2x\%$ লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে $\frac{27x}{2}$ টাকা বেশি পাওয়া যায়, খাসিটির ক্রয়মূল্য কত?
11. টাকায় n টি লেবু বিক্রয় করায় $r\%$ ক্ষতি হয়। $s\%$ লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে?
12. টাকায় 12টি লেবু বিক্রয় করলে $x\%$ ক্ষতি হয়। $11x\%$ লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে?
13. একটি পানির ট্যাঙ্কে দুইটি নল আছে। প্রথম নলটি খুলে দিলে ট্যাঙ্কটি 20 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। দ্বিতীয় নলটি দ্বারা পূর্ণ ট্যাঙ্কটি 30 ঘণ্টায় খালি হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে খালি ট্যাঙ্কটি কত সময়ে পূর্ণ হবে?
14. একটি পিপায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি দ্বারা যথাক্রমে p এবং q মিনিটে পিপাটি পূর্ণ হয় এবং তৃতীয়টি দ্বারা r মিনিটে পরিপূর্ণ পিপাটি পানিশূন্য হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলে s মিনিট পর তৃতীয় নলটি বন্ধ করা হল। কত সময়ে পিপাটি পূর্ণ হবে?
15. ক একটি কাজ করে p দিনে এবং খ করে 2p দিনে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েক দিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?
16. মতি, যতি ও স্মৃতি একত্রে একটি কাজ m দিনে করতে পারে। যতি ও স্মৃতি একত্রে কাজটি n দিনে করতে পারে। মতি একাকী কত দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?
17. একটি গাড়ির ক্রয়মূল্য x টাকা। গাড়িটি কত মূল্যে বিক্রি করলে $y\%$ লাভ হবে?
18. ভাইয়ের বেতন বোনের বেতন অপেক্ষা $y\%$ বেশি; ফলে বোনের বেতন ভাইয়ের বেতন অপেক্ষা $x\%$ কম। x কে y এর ফাংশন রূপে প্রকাশ কর।
19. ক ও খ এই দুই স্থানের দূরত্ব d কি. মি.। একই সময়ে আশিক ও রাজীব যথাক্রমে ক ও খ থেকে পরস্পরের দিকে রওয়ানা হয়ে t_1 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হল। মিলিত হওয়ার t_2 ঘণ্টা পরে আশিক খ–তে পৌঁছল। উভয়ের গতিবেগ কত?
20. মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) $x\%$. একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ p টাকার মিষ্টি বিক্রি করলে তাকে কত ভ্যাট দিতে হবে? $x = 15$, $p = 2300$ হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

21. টেলিফোনের কলের সংখ্যা 173, প্রতিকলের মূল্য 1·70 টাকা, তার ভাড়া 150 টাকা এবং ভ্যাট 15% হলে, টেলিফোন বিলের ও ভ্যাটের পরিমাণ নির্ণয় কর।

22. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 2400 টাকায় বাস ভাড়া করা হল এবং প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে ঠিক করল। 10 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 8 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল? প্রত্যেককে কত করে ভাড়া দিতে হল?

23. এক মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে t_1 ঘণ্টায় d কি. মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার t_2 ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

24. একটি সাহায্যকারী সংস্থা p কেজি চাল বিতরণ করে এভাবে যে যাঁরা বিতরণে সাহায্য করেন তাঁরা পান চালের $\frac{1}{8}$ অংশ। অবশিষ্ট চাল বিতরণ করা হল m জন সসন্তান বিধবা এবং n জন নিঃসন্তান বিধবাকে। প্রত্যেক সসন্তান বিধবা, প্রত্যেক নিঃসন্তান বিধবার দ্বিগুণ চাল পেলে দেখাও যে, সসন্তান প্রত্যেক বিধবার প্রাপ্ত চালের পরিমাণ

$$\frac{p}{m}\left[1-\left\{\frac{1}{8}+\left(1-\frac{1}{8}\right) \text{ এর } \frac{n}{2m+n}\right\}\right] \text{ কে. জি.।}$$

$p = 112, m = 14$ এবং $n = 7$ হলে, প্রত্যেক সসন্তান বিধবার প্রাপ্ত চালের পরিমাণ কত?

[বি: দ্র: বিতরণে সাহায্যকারীর স্থলে মা, সসন্তান বিধবার স্থলে ভাই এবং নিঃসন্তান বিধবার স্থলে বোন বিবেচনা করে মুসলিম আইনের ফরায়েজে উপরোক্ত সূত্র প্রয়োগ করে ভাই–বোনের অংশ নির্ণয় করা যায়।]

প্রশ্ন

১। নিচের কোনটি $\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$ এর মান নির্দেশ করে?

ক. $4ab$ খ. $2(a^2+b^2)$

গ. $2ab$ ঘ. a^2+b^2.

২। m^4+m^2+1 এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি ?

ক. $(m^2-m+l)(m^2+m-l)$ খ. $(m^2+m-l)(m^2-m+l)$

গ. $(m^2+m+l)(m^2+m+l)$ ঘ. $(m^2-m+l)(m^2+m+l)$

নিচের সমীকরণটি লক্ষ কর :

$x+\frac{2}{x}=3$

ওপরের সমীকরণের ভিত্তিতে (৩ – ৫) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। $(x-\frac{2}{x})^2$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 9 খ. 5

গ. 3 ঘ. 1

৪। x এর কোন মান প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে?

ক. 1, 2 খ. 2, 3

গ. 1 ঘ. 2

৫। $x^3+\frac{8}{x^3}$ এর মান কত ?

ক. 1 খ. 8

গ. 9 ঘ. 16

৬। i. $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

ii. a^3-a+6 এর একটি উৎপাদক $a-2$

iii. একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফা x টাকা হলে এবং y টাকা বিনিয়োগে m সময়ান্তে সবৃদ্ধি মূল B হলে, $B=Y(1+x)^m$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৭। $p(9-p^2)$ এবং $p^2(p^2+6p+9)$ এর গ.সা.গু. কত?

ক. $-p^2(p+3)^2(p-3)$ খ. $p^2(p^2-9)(p-3)$

গ. $p(p+3)^2(p-3)$ ঘ. $p(p+3)$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। শ্রেয়সী লিরার চেয়ে p% বেশি বেতন পায়। ফলে লিরা শ্রেয়সীর চেয়ে q% কম বেতন পায়।

ক. শ্রেয়সীর বেতন S টাকা ও লিরার বেতন L টাকা হলে, তাদের বেতন একটি বীজগাণিতিক রাশির সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. p কে q এর ফাংশন রূপে এবং q কে p এর ফাংশনরূপে প্রকাশ কর।

গ. লিরার বেতন 12000 টাকা ও $p = 900$ এবং $q = 50$ হলে, শ্রেয়সীর বেতন কত? $p = x + 10$ এবং $q = y + 20$ হলে, পরিবর্তিত ফাংশনটি কী?

২। $x = 2 + \sqrt{3}$

ক. ওপরের সমীকরণ থেকে $\frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান বের কর।

গ. দেখাও যে, $(x^2 - \frac{1}{x^2})(x^3 - \frac{1}{x^3}) = 720$

৩। $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$

$Q(x) = 24 + 8x - 6x^2 - 2x^3$

$R(x) = (a - m)x^2 - 3x(x - a) + 9(m - x)$

ক. P(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. $Q(x) = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

গ. P(x), Q(x) এবং R (x) এর ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদম

ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

n একের চেয়ে বড় কোনো নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা হলে, a^n দ্বারা n সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফল বোঝায়, যাদের প্রত্যেকে $= a$ অর্থাৎ a^n হচ্ছে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণফল।

$a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times a$ (n সংখ্যক a)

a^n কে a এর n তম ঘাত বা শক্তি বলা হয়। তবে, a^2 কে a এর বর্গ এবং a^3 কে a এর ঘন বলাই প্রচলিত রীতি।

a^n এ n কে a এর সূচক এবং a কে ভিত্তি বলা হয়।

পূর্ণতার খাতিরে $a^1 = a$ ধরা হয়। $n = 1$ এর জন্য a^n এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়ার ফলে নিম্নবর্ণিত সূচক সূত্র m এবং n এর সকল ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক মানের জন্য খাটে।

(১) a যেকোনো সংখ্যা এবং m, n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $a^m . a^n = a^{m+n}$,

কেননা , $$a^m . a^n = \underbrace{(a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a)}_{(m \text{ সংখ্যক } a)} . \underbrace{(a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a)}_{(n \text{ সংখ্যক } a)}$$

$$= \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}_{m+n \text{ সংখ্যক } a} = a^{m+n}$$

অনুসিদ্ধান্ত : $m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, m_r$ প্রত্যেকে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,

$a^{m_1} . a^{m_2} . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a^{m_r} = a^{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_r}$

(২) $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a \ (m \text{ সংখ্যক } a)}{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a \ (n \text{ সংখ্যক } a)}, \quad a \neq 0, m, n, (m-n) \in N$$

$$= (a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times a \ (m - n \text{ সংখ্যক } a)$$
$$= a^{m-n}$$

(৩) a, b যেকোনো সংখ্যা এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $(ab)^n = a^n b^n$, কেননা গুণের বিনিময় সূত্র $ab = ba$ প্রয়োগ করে পাই, $$(ab)^n = \underbrace{(ab) \times (ab) \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times (ab)}_{n \text{ সংখ্যক } ab}$$

$$= \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a)}_{(n \text{ সংখ্যক } a)} . \underbrace{(b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times b)}_{(n \text{ সংখ্যক } b)} = a^n b^n$$

(৪) a যেকোনো সংখ্যা, b অশূন্য সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$, কেননা

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \frac{a}{b} \quad \left(n \text{ সংখ্যক } \frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a \ (n \text{ সংখ্যক } a)}{b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times b \ (n \text{ সংখ্যক } b)} = \frac{a^n}{b^n}$$

ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

a^{-1} এর সংজ্ঞা : $a \neq 0$ এবং n ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

যেমন, $a^{-1} = \frac{1}{a^{-(-1)}} = \frac{1}{a}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^{-(-2)}} = \frac{1}{a^2}$

লক্ষণীয় যে, $n \in N$ হলে, $a^{-n} = \frac{1}{a^{-(-n)}} = \frac{1}{a^n}$ হবে।

তখন সূচক সূত্রাবলি m, n এর যেকোনো ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক মানের জন্য প্রযোজ্য। পূর্ণতার প্রয়োজনে পরিশেষে a^0 এর সংজ্ঞা দেওয়ার প্রয়োজন, যেখানে $a \neq 0$

সংজ্ঞা : $a \neq 0$ হলে, $a^0 = 1$

সূচক নিয়ম :

m, n যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে, $a^m . a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \neq 0$

$(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

উদাহরণ 1. (i) $2^0 = 1$ (ii) $2^4 = 2.2.2.2 = 16$ (iii) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

উদাহরণ 2. (i) $5^3 \times 5^5 = 5^{3+5} = 5^8 = (5^4)^2 = (625)^2 = 390625$

(ii) $5^3 \div 5^5 = 5^{3-5} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

(iv) $6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 . 3^3 = 216$ (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

n তম মূল :

a ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, a এর n তম মূল হল এমন একটি বাস্তব সংখ্যা x যেন $x^n = a$ হয়। প্রত্যেক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল রয়েছে। একে $\sqrt[n]{a}$ এর প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং, $b = \sqrt[n]{a}$ এর অর্থ : $b > 0$ এবং $b^n = a$.

a ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং n বিজোড় (স্বাভাবিক) সংখ্যা হলে, a এর একটি অনন্য ঋণাত্মক n তম মূল রয়েছে যাকে $\sqrt[n]{-a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $\sqrt[3]{-27} = -3$, কেননা $(-3)^3 = -27$.

$a = 0$ হলে, a এর n তম মূল 0 অর্থাৎ, $\sqrt[n]{a} = 0$.

n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, প্রকৃত বা অপ্রকৃত যেকোনো ভগ্নাংশ (তথা মূলদ সংখ্যা) হলে, এখন আমরা a^n এর সংজ্ঞা দিতে পারি।

ধরি, $n = \frac{p}{q}$ যেখানে p, q পূর্ণ সংখ্যা এবং $q > 0$

সংজ্ঞা : $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$, বিশেষত $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

যেমন, $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}} = 4$

সূচক মূলদ সংখ্যা হলে সূচকের নিয়মাবলি বলবৎ থাকে।

উদাহরণ 3. (i) $8^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{8}$

(ii) $8^{\frac{3}{4}} . 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 8^{\frac{5}{4}}$

(iii) $\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 10^{\frac{1}{2}}$

(iv) $(50)^{\frac{1}{2}} = (25 \times 2)^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} . 2^{\frac{1}{2}} = 5.2^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}$

(v) $8^{\frac{5}{4}} = 8^{1+\frac{1}{4}} = 8^1 . 8^{\frac{1}{4}} = 8\sqrt[4]{8}$

উদাহরণ 4. a ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং l, m ও n মূলদ সংখ্যা হলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m \left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n = 1$$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m \left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n = (a^{m-n})^l\, (a^{n-l})^m\, (a^{l-m})^n$

$= a^{lm-ln}\, a^{mn-lm}\, a^{ln-mn} = a^{lm-ln+mn-lm+ln-mn}$

$= a^0 = 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5. সরল কর : $(12)^{-\frac{1}{2}} . \sqrt[3]{54}$

সমাধান : $(12)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{54} = \frac{1}{(4 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[3]{2 \times 27} = \frac{1}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{2 \times 3^{\frac{1}{2}}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3 = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$$

প্রশ্নমালা 4.1

সরল কর : (প্রশ্ন 1 হতে 9) :

1. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$ [$a > 0, b > 0$]

2. $\left(\frac{x^{p+q}}{x^{2r}}\right)\left(\frac{x^{q+r}}{x^{2p}}\right)\left(\frac{x^{r+p}}{x^{2q}}\right)$ [$x > 0$ এবং p, q, r মূলদ সংখ্যা]

3. $\sqrt{x^{-1}y} . \sqrt{y^{-1}z} . \sqrt{z^{-1}x}$ [x, y, z প্রত্যেকে > 0]

4. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$ [$x > 0$ এবং a, b, c, > 0]

5. (i) $\Pi^{\frac{3}{4}} . \Pi^{\frac{3}{4}}$ (ii) $\Pi^{\frac{3}{4}} \div \Pi^{\frac{3}{4}}$ (iii) $\frac{4^n - 1}{2^n - 1}$

6. $\frac{3.2^n - 4.2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

7. $\frac{2^{x+4} - 4.2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2}$

8. $\dfrac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.6^{m}}{6^{n}.10^{m+2}.15^{n}}$ 9. $\dfrac{3^{m+1}}{(3^{m})^{m-1}} \div \dfrac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

10. দেখাও যে, $\left(\dfrac{x^{q}}{x^{r}}\right)^{q+r-p} \times \left(\dfrac{x^{r}}{x^{p}}\right)^{r+p-q} \times \left(\dfrac{x^{p}}{x^{q}}\right)^{p+q-r} = 1$

11. দেখাও যে, $\left\{\dfrac{x^{(p+q)^2}}{x^{pq}}\right\}^{p-q} \times \left\{\dfrac{x^{(q+r)^2}}{x^{qr}}\right\}^{q-r} \times \left\{\dfrac{x^{(r+p)^2}}{x^{rp}}\right\}^{r-p} = 1$

লগারিদম

বড় বড় সংখ্যার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান বের করতে লগারিদমের ব্যবহার করা হয়।
মনে করি, $a > 0, a \neq 1$ এবং n ধনাত্মক সংখ্যা।
যদি $a^x = n$ হয়, তবে x কে n এর a ভিত্তিক লগারিদম (সংক্ষেপে, লগ) বলা হয় এবং লেখা হয় $x = \log_a n$. $\log_a n$ কে "a ভিত্তিক লগ n" পড়া হয়।
লক্ষণীয়, $a^x = n$ এবং $x = \log_a n$ সমার্থক উক্তি।

উদাহরণ 6. $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2$, কেননা $10^2 = 100$

$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$, কেননা $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$\log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2}$, কেননা $5^{\frac{3}{2}} = 5.5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যাই হোক না কেন, a^x সর্বদাই ধনাত্মক সংখ্যা। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম আছে। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নেই।

উদাহরণ 7. $\log_{2\sqrt{5}}400 = x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে, $(2\sqrt{5})^x = 400 = 16 \times 25 = 2^4.5^2 = 2^4(\sqrt{5})^4 = (2\sqrt{5})^4$.

$\therefore x = 4$

উদাহরণ 8. যদি $\log_x 324 = 4$ হয়, তবে $x =$ কত?

সমাধান : $x^4 = 324 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 3^4.2^2 = 3^4(\sqrt{2})^4 = (3\sqrt{2})^4$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$

বি: দ্র: $a > 0,\ a \neq 1$ এবং $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ সিদ্ধান্ত করা যায়।
আবার, $x \neq 0, a > 0, b > 0$ এবং $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ সিদ্ধান্ত করা যায়।

প্রশ্নমালা 4.2

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_2 16$ (ii) $\log_6 6\sqrt{6}$ (iii) $\log_a a^4$ (iv) $\log_4 2$

(v) $\log_{12}\sqrt{12}$ (vi) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ (vii) $\log_5 (\sqrt[3]{5})(\sqrt{5})$

2. x এর মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_{10}x = 2$ (ii) $\log_{10}x = -2$ (iii) $\log_5 x = 3$ (iv) $\log_5 x = 2$

(v) $\log_x 25 = 2$ (vi) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

লগারিদমের সূত্রাবলি

প্রমাণ ব্যতিরেকে সূত্রগুলো উল্লেখ করা হল। এখানে, $a > 0, a \neq 1$

সূত্র ১। M ধনাত্মক এবং r যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, $\log_a M^r = r \log_a M$

সূত্র ২। $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

সূত্র ৩। $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

সূত্র ৪। $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

লক্ষণীয় যে, $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$ $(a > 0, a \neq 1)$

বি: দ্র: লগের ভিত্তি দেওয়া না থাকলে, সর্বত্র একই ভিত্তি বিবেচ্য।

উদাহরণ 9. দেখাও যে, $\log 21 = \log 7 + \log 3$.

সমাধান : $\log 21 = \log (7 \times 3) = \log 7 + \log 3$

উদাহরণ 10. দেখাও যে, $5 \log 3 - \log 9 = \log 27$.

সমাধান : $5 \log 3 - \log 9 = \log 3^5 - \log 3^2 = \log (3^5 \div 3^2)$

$= \log 3^{5-2} = \log 3^3 = \log 27$

উদাহরণ 11. সরল কর : $3 \log \frac{36}{25} + \log \left(\frac{2}{9}\right)^3 - 2 \log \frac{16}{125}$.

সমাধান : $3 \log \frac{36}{25} + \log \left(\frac{2}{9}\right)^3 - 2 \log \frac{16}{125} = \log \left(\frac{36}{25}\right)^3 + \log \left(\frac{2}{9}\right)^3 - \log \left(\frac{16}{125}\right)^2$

$= \log \left\{ \left(\frac{36}{25}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3^2}\right)^3 \div \left(\frac{2^4}{5^3}\right)^2 \right\} = \log \left\{ \left(\frac{2^2.3^2}{5^2}\right)^3 \times \frac{2^3}{3^6} \div \left(\frac{2^8}{5^6}\right) \right\}$

$= \log \left(\frac{2^6.3^6.2^3.5^6}{5^6.3^6.2^8} \right) = \log \left(\frac{2^9}{2^8}\right) = \log (2^{9-8}) = \log 2^1 = \log 2.$

প্রশ্নমালা 4.3

দেখাও যে (প্রশ্ন 1 হতে 5) :

1. $\log 12 = \log 3 + \log 4$
2. $\log 360 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5$
3. $\log \frac{50}{147} = \log 2 + 2 \log 5 - \log 3 - 2 \log 7$
4. $3 \log 2 + \log 5 = \log 40$
5. $5 \log 5 - \log 25 = \log 125$
6. সরল কর : (i) $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

   (ii) $\log 5 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80}$

   (iii) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

   (iv) $\frac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1{\cdot}2}$

   (v) $\log \frac{a^3b^3}{c^3} + \log \frac{b^3c^3}{d^3} + \log \frac{c^3d^3}{a^3} - 3 \log b^2c.$

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ

পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব প্রায় 150000000 কি. মি., আবার একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ 0·0000000037 সে. মি.। বিজ্ঞানজগতে এমনি অনেক বড় এবং ছোট সংখ্যার ব্যবহার আছে। সুবিধার জন্য ঐ সকল সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে $1 \leq a < 10$ (অর্থাৎ, a এর মান 1 বা একের চেয়ে বড় কিন্তু 10 এর চেয়ে ছোট) এবং n পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য)। কোনো সংখ্যার এই রূপকে বলে বৈজ্ঞানিক রূপ বা আদর্শরূপ। যেমন, 100000 এর আদর্শরূপ 10^5; 0·00001 এর আদর্শরূপ 10^{-5}; উভয় ক্ষেত্রে $a = 1$ বিধায় উহ্য রাখা হয়েছে। কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাকে আদর্শরূপে প্রকাশ করতে হলে তার পরমমানের আদর্শরূপের আগে – চিহ্ন দিতে হবে।

উদাহরণ 12. সূর্যের কেন্দ্রের তাপমাত্রা 15000000 ডিগ্রি সেন্টিগ্রেড; এ তাপমাত্রাকে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : $15,000,000 = 15 \times 1,000,000 = 15 \times 10^6 = \frac{15}{10} \times 10 \times 10^6 = 1{\cdot}5 \times 10^7$

উদাহরণ 13. সূর্য হতে বুধের দূরত্ব 58000000 কি. মি.। ঐ সংখ্যাকে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : $58000000 = 58 \times 10^6 = \frac{58}{10} \times 10 \times 10^6 = 5{\cdot}8 \times 10^7$

উদাহরণ 14. 0·0000000037 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : $0{\cdot}0000000037 = \frac{37}{10000000000} = \frac{37}{10^{10}} = \frac{37}{10} \times 10 \times 10^{-10} = 3{\cdot}7 \times 10^{-9}$

উদাহরণ 15. স্বাভাবিক আকারে প্রকাশ কর : (i) $3{\cdot}47 \times 10^6$ (ii) $4{\cdot}5 \times 10^{-6}$

সমাধান : (i) $3{\cdot}47 \times 10^6 = 3{\cdot}47 \times 1000000 = 347 \times 10000 = 3470000$

(ii) $4{\cdot}5 \times 10^{-6} = 4{\cdot}5 \times \frac{1}{10^6} = \frac{45}{10} \times \frac{1}{10^6} = \frac{45}{10^7} = \frac{45}{10000000} = 0{\cdot}0000045.$

প্রশ্নমালা 4.4

বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ কর (প্রশ্ন 1 থেকে 8) :

1. 735 2. 0·0176 3. 830 4. 0·0245 5. 0·00000512
6. 637,000,000,000
7. সূর্য থেকে শুক্রের দূরত্ব 105,600,000 কি. মি.
8. সূর্য থেকে নেপচুনের দূরত্ব 4500,000,000 কি. মি.

সাধারণ দশমিক আকারে প্রকাশ কর (প্রশ্ন 9 থেকে 14) :

9. 10^3 10. 10^{-6} 11. $1{\cdot}23 \times 10^4$

12. $9{\cdot}873 \times 10^{-2}$ 13. $1{\cdot}32 \times 10^{-7}$ 14. $3{\cdot}356 \times 10^{-8}$

সাধারণ লগারিদম

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে লগারিদমের ভিত্তি সাধারণত 10 ধরা হয়। 10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলা হয়। এই ক্ষেত্রে ভিত্তি উহ্য রাখা হয়, অর্থাৎ, $\log_{10}N$ বোঝাতে $\log N$ লেখা হয়। কোনো ধনাত্মক সংখ্যা N এর বৈজ্ঞানিকরূপ যদি $a \times 10^n$ হয়, তবে

$\log N = \log (a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n = n + \log a.$

দেখা যায়, কোনো ধনাত্মক সংখ্যা N এর সাধারণ লগারিদমকে দুইটি অংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। একটি অংশ পূর্ণসংখ্যা (যা ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) এবং অপর অংশ শূন্য বা শূন্য ও একের মধ্যবর্তী একটি সংখ্যা। এভাবে প্রকাশ করা হলে উক্ত পূর্ণসংখ্যাকে $\log N$ এর পূর্ণক এবং অপর অংশটিকে $\log N$ এর অংশক বলে।

$N = 10^n$ হলে, $\log N$ এর পূর্ণক n এবং অংশক শূন্য।

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক

আমরা জানি, কোনো সংখ্যার আদর্শরূপে 10 এর শক্তির সূচকই ঐ সংখ্যার সাধারণ লগের পূর্ণক।
অতএব, $\log 2{\cdot}81$ এর পূর্ণক 0, যেহেতু $2{\cdot}81 = 2{\cdot}81 \times 10^{\circ}$. $\log 281$ এর পূর্ণক 2, যেহেতু $281 = 2{\cdot}81 \times 10^2$.
$\log 0{\cdot}00281$ এর পূর্ণক -3, যেহেতু $0{\cdot}00281 = 2{\cdot}81 \times 10^{-3}$.

1 অপেক্ষা বড় ধনাত্মক সংখ্যার আদর্শরূপে 10 এর শক্তির সূচক শূন্য অথবা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং তা সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর বামে অবস্থিত অঙ্কগুলোর সংখ্যা থেকে 1 কম। 1 অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক সংখ্যার আদর্শরূপে 10 এর শক্তির সূচক ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং তার পরমমান সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও দশমিক বিন্দুর ডানে প্রথম অশূন্য অঙ্কের মধ্যে অবস্থিত শূন্যের সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশি। সুতরাং সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম হিসেবে পাই :

(ক) 1 থেকে বড় কোনো সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক শূন্য বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তা সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর পূর্বের সার্থক অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

(খ) 1 থেকে ছোট কোনো ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা; তার পরমমান সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও দশমিক বিন্দুর ডানে প্রথম অশূন্য অঙ্কের মধ্যবর্তী শূন্যের সংখ্যা থেকে 1 বেশি।

উদাহরণ 16. নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর :
(i) 8350 (ii) 62·37 (iii) 0·000835

সমাধান : (i) 8350 সংখ্যাটি 1 থেকে বড়। এর দশমিক বিন্দুর পূর্বে চারটি অঙ্ক রয়েছে, কেননা $8350 = 8350{\cdot}0$ লেখা যায়। সুতরাং $\log 8350$ এর পূর্ণক $4 - 1 = 3$.

(ii) 62·37 সংখ্যাটি 1 থেকে বড়। এর দশমিক বিন্দুর পূর্বে দুইটি অঙ্ক আছে। সুতরাং $\log 62{\cdot}37$ এর পূর্ণক $2 - 1 = 1$.

(iii) 0·000835 সংখ্যাটি 1 থেকে ছোট; দশমিক বিন্দুর ডানে এর প্রথম অশূন্য (বা সার্থক) অঙ্ক হচ্ছে 8 এবং দশমিক বিন্দু ও 8 এর মধ্যে তিনটি শূন্য রয়েছে। সুতরাং $\log 0{\cdot}000835$ এর পূর্ণকের পরমমান হচ্ছে $3 + 1 = 4$, সুতরাং 0·000835 এর পূর্ণক হচ্ছে -4.

লগ সার ণ

কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। অংশক সচরাচর অমূলদ সংখ্যা এবং তা নির্ণয়ের কোনো সহজ পদ্ধতি নেই। উচ্চতর গণিত প্রয়োগ করে যেকোনো সংখ্যার লগের অংশকের যত ইচ্ছা তত দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

বড় বড় গুণ, ভাগ, শক্তি নির্ণয়, মূলাকর্ষণ ইত্যাদি সহজে সম্পন্ন করার জন্য সাধারণ লগারিদম ব্যবহার করা যায়। এ সকল হিসেবে অংশকের আসন্ন মান ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়। তাই অংশকগুলোর আসন্ন মানের তালিকা প্রস্তুত করা হয়েছে; এরূপ তালিকাকে লগ সারণি বলা হয়। তাতে অংশকের অঙ্কগুলোর মাত্রা দেওয়া থাকে; ব্যবহারের সময় দশমিক বিন্দু খেয়াল করে বসিয়ে নিতে হয়। এই পুস্তকের শেষে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট লগ সারণি সংযোজিত করা হল; অর্থাৎ, এতে অংশকগুলোর আসন্ন মান পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত দেওয়া আছে।
লগ সারণির প্রথম (সর্ব বামের) কলামে 10, 11, 12, ..., 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো আছে। এই কলামের ডানে পরের দশটি কলাম জুড়ে রয়েছে মূল লগ সারণি। এদের শীর্ষে যথাক্রমে (বাম থেকে ডানে) 0, 1, 2, ..., 9 লেখা রয়েছে। এই দশটি কলামের ডানে পৃথক করে আরও নয়টি কলাম রয়েছে, যাদের শীর্ষে 1, 2, 3, ..., 9 লেখা রয়েছে। এই অংশটিকে বলা হয় অন্তর সারণি। একটি উদাহরণের মাধ্যমে লগ সারণি হতে অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হল।

উদাহরণ 17. লগ সারণি থেকে 4857 এর অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান : লগ সারণির সর্ব বামের কলামে 48 লিখিত সারি বরাবর 5 শীর্ষক কলামে আমরা দেখতে পাই 68574. এর অর্থ 4850 এর লগের অংশক হল 0˙68574. log 4857 এর অংশক নির্ণয়ের জন্য মূল সারণির ডানে অবস্থিত 7 শীর্ষক অন্তর সারণির কলাম বিবেচনায় আনতে হবে। সেখানে 48 সারিতে 63 দেখতে পাই। এর অর্থ সংখ্যাটি 4850 থেকে 4857 এ বৃদ্ধি পেলে লগের অংশকের বৃদ্ধির পরিমাণ দাঁড়ায় 0˙00063.
অতএব, log 4857 এর অংশক $= 0{\cdot}68574 + 0{\cdot}00063 = 0{\cdot}68637$

উদাহরণ 18. log 0˙000456 নির্ণয় কর।

সমাধান : log 0˙000456 এর পূর্ণক হল -4.
লগ সারণি থেকে পাই, log 0˙000456 এর অংশক 0˙65896.
$\therefore \log 0{\cdot}000456 = -4 + 0{\cdot}65896 = \bar{4}{\cdot}65896$
এক্ষেত্রে পূর্ণকের – চিহ্ন পূর্ণকের ওপরে লেখা হয়েছে, কারণ $-4{\cdot}65896$ লিখলে $-4-0{\cdot}65896$ বোঝায়।

N এর লগারিদম যদি x হয় অর্থাৎ যদি $\log N = x$ হয়, তবে N কে x এর প্রতিলগ বলা হয় এবং $N = \text{anti} \log x$ লেখা হয়।

লগারিদমের ব্যবহারিক প্রয়োগে সর্বদা সমাধানে শেষ স্তরে কোন জ্ঞাত সংখ্যা কোন সংখ্যার লগ, তা জানার প্রয়োজন হয় অর্থাৎ প্রতিলগ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। এ কাজ সহজে সমাধা করার জন্য লগ সারণির অনুরূপ প্রতিলগ সারণি প্রস্তুত করা হয়েছে। কোনো অজ্ঞাত সংখ্যার লগের অংশক জানা থাকলে প্রতিলগ সারণি থেকে সংখ্যাটি বের করা যায়।

প্রতিলগ সারণিতে সর্ববামের কলামে অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক, পরবর্তী দশটি কলামের শীর্ষে তৃতীয় অঙ্ক এবং অন্তর সারণির নয়টি কলামে চতুর্থ অঙ্ক দেওয়া থাকে। লক্ষণীয়, এখানেও দশমিক বিন্দু উহ্য থাকে। উদাহরণের মাধ্যমে প্রতিলগ সারণির ব্যবহার ব্যাখ্যা করা হল।

উদাহরণ 19. একটি সংখ্যার লগারিদম 0˙5514. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সংখ্যাটি x , $\therefore \log x = 0{\cdot}5514$.
log x এর পূর্ণক = 0 এবং অংশক ˙5514.
অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক হল 55. প্রতিলগ সারণির সর্ববামের কলামে 55 চিহ্নিত সারি লক্ষ করি। উক্ত সারি বরাবর 1 শীর্ষক কলামে 35563 দেখতে পাই; এর অর্থ $\log 3{\cdot}5563 = 0{\cdot}5510$.
অতএব, $\text{anti} \log 0{\cdot}5510 = 3{\cdot}5563$.

এর পর অন্তর সারণিতে 4 শীর্ষক কলামে দেখতে পাই 33; এর অর্থ লগ 0·5510 হতে 0·5514 এ বৃদ্ধি পেলে প্রতিলগের বৃদ্ধির পরিমাণ হয় 0·0033.

সুতরাং, anti log $0{\cdot}5514 = 3{\cdot}5563 + 0{\cdot}0033 = 3{\cdot}5596 \therefore x = 3{\cdot}5596$

উদাহরণ 20. $\log x = -3{\cdot}5463$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক হল 54.

প্রতিলগ সারণির সর্ববামের 54 চিহ্নিত সারি লক্ষ করি। উক্ত সারি বরাবর 6 শীর্ষক কলামে 35156 দেখতে পাই। অন্তর সারণিতে 3 শীর্ষক কলামে দেখতে পাই 24. অতএব, 35156 + 24 = 35180. পূর্ণক হল −3. সুতরাং, দশমিক এবং 35180 এর মাঝে শূন্য হবে দুইটি। $\therefore x = 0{\cdot}003518$.

উদাহরণ 21. $57{\cdot}29 \times 1{\cdot}904$ এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ক্যালকুলেটর ও লগারিদমের সাহায্যে।

সমাধান : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে: $57{\cdot}29 \times 1{\cdot}904 = 109{\cdot}08016 \approx 109{\cdot}08$

লগ সারণির সাহায্যে : $\log (57{\cdot}29 \times 1{\cdot}904) = \log 57{\cdot}29 + \log 1{\cdot}904$

$= 1{\cdot}75808 + 0{\cdot}27964$ (লগ সারণি থেকে) $= 2{\cdot}03772$

অতএব, $57{\cdot}29 \times 1{\cdot}904 =$ anti log $2{\cdot}03772 \approx 109{\cdot}08$ (প্রতিলগ সারণি হতে)।

উদাহরণ 22. বার্ষিক 5% হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 1000 টাকা 2 বছরের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$.

এখানে C চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল (টাকায়), $P = 1000, r = \frac{5}{100}$, $n = 2$.

$\therefore \log C = \log P(1+r)^n = \log P + n \log (1 + r)$

$= \log 1000 + 2 \log 1{\cdot}05 = 3 + 2 \times 0{\cdot}02119 = 3 + 0{\cdot}04238 = 3{\cdot}04238.$

লগ সারণি হতে পাই, anti log $3{\cdot}04238 = 1102{\cdot}50 \therefore C \approx 1102{\cdot}50$ টাকা

বি: দ্র: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে করলেও একই উত্তর পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 23. সমাধান কর : $3^x = 16$

সমাধান : $\log 3^x = \log 16$

বা, $x \log 3 = \log 16$

বা, $x = \frac{\log 16}{\log 3} \approx \frac{1{\cdot}2041}{0{\cdot}4771} \approx 2{\cdot}52$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore x \approx 2{\cdot}52$

প্রশ্নমালা 4.5

(লগ সারণি উল্লেখ না থাকলে ক্যালকুলেটর ব্যবহার করতে হবে)

1. নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর :

   (i) 842 (ii) 75·249 (iii) 7·5249 (iv) 2·329 (v) 0·032 (vi) 0·00021

2. নিচের সংখ্যাগুলোর লগ (লগ সারণি থেকে) নির্ণয় কর :

   (i) 324 (ii) 9·27 (iii) 0·04312

3. নিচের সমীকরণ থেকে x এর মান বের কর :

   (i) $\log x = 0{\cdot}4871$ (ii) $\log x = 2{\cdot}54$ (iii) $\log x = \bar{2}{\cdot}6010$

4. লগ সারণি ব্যবহার করে গুণফল (আসন্ন) নির্ণয় কর :

   (i) $6{\cdot}79 \times 5{\cdot}34$ (ii) $9{\cdot}56 \times 8{\cdot}72$ (iii) $77{\cdot}5 \times 3{\cdot}7 \times 1{\cdot}4$

5. লগ সারণি ব্যবহার করে ভাগফল (আসন্ন) নির্ণয় কর :

   (i) $3{\cdot}56 \div 2{\cdot}15$ (ii) $293{\cdot}2 \div 212{\cdot}2$

6. 12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 273·00 টাকা 5 বছরে সবৃদ্ধিমূল কত?

7. কত বছরে যেকোনো মূলধন 5% চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় দ্বিগুণ হবে?

8. একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 24 এয়র। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 ঃ 2 হলে, এ জমির পরিসীমা কত?

9. সমাধান কর : (i) $4^{x+1} = 2^{x-2}$ (ii) $3^x = 4^2$

10. যদি $\log 2 = 0{\cdot}3010$, $\log 3 = 0{\cdot}4771$ এবং $\log 7 = 0{\cdot}8450$ হয়, তবে লগ সারণি ব্যবহার না করে নিম্নলিখিত রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর :

    (i) log 6 (ii) log 21 (iii) log 42

প্রশ্ন

১। $a \neq 0$ হলে, নিচের কোনটি $(a^{-1})^{-1}$ এর সঠিক মান ?

ক.	a	খ.	a^{-1}
গ.	a^{-2}	ঘ.	a^{2}

২। নিচের কোনটি $\log_4 64$ এর সঠিক মান ?

ক.	8	খ.	4
গ.	3	ঘ.	2

৩। নিচের সম্পর্কগুলো লক্ষ কর :

i. $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$

ii. $a^z = m$ হলে, $z = \log_a m$ যেখানে, $a > 0$, $a \neq 1$ এবং m ধনাত্মক সংখ্যা।

iii. p, q যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(a^p)^q = a^{p+q}$; $a \neq 0$

ওপরের সম্পর্কগুলোর আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক.	i, ii ও iii	খ.	i ও ii
গ.	i ও iii	ঘ.	ii ও iii

৪। নিচের গাণিতিক বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম আছে

ii. $y \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$ এবং $a^y = b^y$ হলে, $a = b$ হয়

iii. $a > 0$, $a \neq 1$ হলে, $\log_a M^q = q \log_a M.$

ওপরের গাণিতিক বাক্যগুলোর আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক.	i ও ii	খ.	i ও iii
গ.	ii ও iii	ঘ.	i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$M = \frac{4^m-1}{2^m-1},\ N = \frac{4^{m+1}.4^{m-1}}{16^m},\ R = \log_9 \sqrt{3}.$$

৫। নিচের কোনটি M এর সঠিক মান?

ক.	2^m+1	খ.	2^m-1
গ.	2^{m+1}	ঘ.	2^{m-1}

৬। নিচের কোনটি $\frac{M}{N}$ এর সঠিক মান ?

ক.	2^m-1	খ.	2^m+1
গ.	2^{m+1}	ঘ.	2^{m-1}

৭। নিচের কোনটি $(M \times N \div R)$ এর মান নির্দেশ করে ?

ক. 4.2^{m+1} খ. $4(2^m-1)$

গ. 4.2^{m-1} ঘ. $4(2^m+1)$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। যদি $p = x^a$, $q = x^b$ এবং $r = x^c$ হয়, তবে

ক. $\left(\frac{p}{q}\right)^c \times \left(\frac{q}{r}\right)^a \times \left(\frac{r}{p}\right)^b$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $2abc\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{ab}} \times \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{ca}}\right\} \times \sqrt{a^{-3}b^{-2}c} \times \sqrt{c^{-3}a}$ এর সরলীকরণ কর।

গ. দেখাও যে,

$$\frac{\{(a-b)\log(pq) + (b-c)\log(qr) + (c-a)\log(rp)\}}{\left(\sqrt{a^{-1}b} \times \sqrt{b^{-1}c} \times \sqrt{c^{-1}a}\right)} = 0$$

২। $x = 2$, $y = 3$ এবং $z = 5$ হলে,

ক. দেখাও যে, $\log(x^3y^2z) = y\log x + x\log y + \log z$.

খ. $\log z + x^4 \log \frac{x^4}{yz} + x^2y \log \frac{z^2}{x^3y} + (x+z)\log \frac{y^4}{x^4z}$ এর সরলীকরণ কর।

গ. $\dfrac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z}$ এর মান নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা সমাধানে অনুপাত ও সমানুপাত ব্যবহার করা হয়, নিচের সমস্যাটি বিবেচনা কর :

রনি ও রানা একটি কাজ 160 টাকায় সম্পন্ন করার চুক্তি নিল। রনি একা 6 ঘণ্টা কাজ করে চলে যায়। বাকি কাজ রানা 10 ঘণ্টায় সম্পন্ন করল। কে কত মজুরি পাবে?

ঘণ্টা প্রতি মজুরি q টাকা হলে, রনির মজুরি $= 6q$ টাকা এবং রানার মজুরি $= 10q$ টাকা

$\therefore\ 6q + 10q = 160$

বা, $16q = 160$

বা, $q = 10$

$\therefore$ রনি পাবে, 6×10 টাকা $= 60$ টাকা

এবং রানা পাবে, 10×10 টাকা $= 100$ টাকা।

লক্ষ কর : $60 = \frac{60}{100} \times 100 = \frac{3}{5} \times 100$

ফলে, 60 টাকা = 100 টাকার $\frac{3}{5}$;

সুতরাং রনির মজুরি রানার মজুরির $\frac{3}{5}$ গুণ। আমরা বলি, রনির মজুরি ও রানার মজুরির অনুপাত $\frac{3}{5}$ এবং লিখি,

রনির মজুরি ঃ রানার মজুরি $= \frac{3}{5}$.

একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের তুলনা করতে অনুপাত ব্যবহার করা হয়। অনুপাত একটি সংখ্যা, যা পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ (প্রকৃত বা অপ্রকৃত) হতে পারে।

দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা a ও b এর অনুপাত $a : b = \frac{a}{b}$.

সমজাতীয় দুইটি রাশি A ও B এর অনুপাত একই এককে তাদের পরিমাণের অনুপাত।

A এর পরিমাণ a একক এবং B এর পরিমাণ b একক (একই একক) হলে, $A : B = a : b = \frac{a}{b}$.

দুইটি রাশির অনুপাত $A : B$ নির্দেশে অনেক সময় $\frac{A}{B}$ লেখা হয়। তবে A ও B সংখ্যা না হলে $\frac{A}{B}$ ভাগ প্রক্রিয়া নির্দেশ করে না।

$A : B$ অনুপাতে A কে পূর্ব রাশি এবং B কে উত্তর রাশি বলা হয়।

$A : B = \frac{a}{b}$ হলে, $A : B = \frac{ka}{kb}$, যেখানে k একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

শতকরাও একটি অনুপাত, যার উত্তর রাশি 100. সুতরাং অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করতে হলে, উত্তর রাশিকে 100 তে রূপান্তর করতে হয়। যেমন, $3 : 5 = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} = 60 \times \frac{1}{100} = 60\ \%$

উদাহরণ 1. A বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা p একক এবং B বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা r (একই একক) হলে, বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের কালির অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : A বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= p$ একক

$\therefore$ A বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{p}{4}$ একক

$\therefore$ A বর্গক্ষেত্রের কালি $= \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$ বর্গ একক

B বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= r$ একক

$\therefore$ B বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{r}{4}$ একক

$\therefore$ B বর্গক্ষেত্রের কালি $= \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{r^2}{16}$ বর্গ একক

$\therefore$ A বর্গক্ষেত্রের কালি ঃ B বর্গক্ষেত্রের কালি $= \frac{p^2}{16} : \frac{r^2}{16} = p^2 : r^2$

উদাহরণ 2. একটি বর্গক্ষেত্রে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত করা হল। বৃত্তক্ষেত্রের কালি ঐ বর্গক্ষেত্রের কালির শতকরা কত? (উত্তর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর)

সমাধান : মনে করি, বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর পরিমাণ $= 2r$ একক

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ একক

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{2r}{2} = r$ একক

$$\therefore \frac{\text{বৃত্তক্ষেত্রের কালি}}{\text{বর্গক্ষেত্রের কালি}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times 100\% = 78{\cdot}54\ \%$$

সমানুপাত

যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় রাশি হওয়ার প্রয়োজন হয় না। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি এক জাতীয় হলেই চলে।

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় যে, $a : b = b : c$

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী যদি এবং কেবল যদি $ac = b^2$ হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে।

উদাহরণ 3. A ও B সমবেগে নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে t_1 এবং t_2 মিনিটে। A ও B এর গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, A ও B এর গতিবেগ প্রতি মিনিটে যথাক্রমে v_1 মিটার ও v_2 মিটার। তাহলে,

t_1 মিনিটে A অতিক্রম করে v_1t_1 মিটার এবং

t_2 মিনিটে B অতিক্রম করে v_2t_2 মিটার।

প্রশ্নানুসারে, $v_1t_1 = v_2t_2 \quad \therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$

$\therefore$ গতিবেগের অনুপাত $= \frac{t_2}{t_1}$

অনুপাতের রূপান্তর

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

1. $a : b = c : d$ হলে, $b : a = d : c$. [ব্যস্তকরণ (invertendo)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore bc = ad$ [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

ফলে, $\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}$ [a, b, c ও d এর কোনোটিই শূন্য নয় ধর্তব্য]

বা, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ অর্থাৎ, $b : a = d : c$.

2. $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$. [একান্তরকরণ (alternendo)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore ad = bc$

ফলে, $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ অর্থাৎ, $a : c = b : d$.

3. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. [যোজন (componendo)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

4. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (dividendo)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

5. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন (componendo – dividendo)]

প্রমাণ : $a : b = c : d$ হলে, বিয়োজন করে পাই, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

সুতরাং, $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$

আবার, $a : b = c : d$ হলে, যোজন করে পাই, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

সুতরাং, $\frac{a+b}{b} \times \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \times \frac{d}{c-d}$

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. [এখানে $a \neq b$ এবং $c \neq d$ ধর্তব্য]

6. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

প্রমাণ : মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$.

$\therefore a = bk, c = dk, e = fk, g = hk$

$$\therefore \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h} = \frac{k(b+d+f+h)}{(b+d+f+h)} = k.$$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$$

উদাহরণ 4. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি s বছর। তাদের বয়সের অনুপাত t বছর পূর্বে ছিল r ঃ p. x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান : মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স a বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স b বছর। তাহলে,

প্রশ্নানুসারে, $a + b = s$ .... (i)

$$\frac{a-t}{b-t} = \frac{r}{p} \text{ .... (ii)}$$

$\frac{a-t}{b-t} = \frac{r}{p}$ থেকে পাই, $\frac{a-t}{r} = \frac{b-t}{p} = \frac{a+b-2t}{r+p} = \frac{s-2t}{r+p}$

$\therefore a - t = \frac{(s-2t)r}{r+p}$ বা, $a = \frac{(s-2t)r}{r+p} + t$

এবং $b - t = \frac{(s-2t)p}{r+p}$ বা, $b = \frac{(s-2t)p}{r+p} + t$

$\therefore$ x বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত $= \frac{a+x}{b+x} = \dfrac{\frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x}{\frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x}$

$\therefore$ x বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে,

$$\left\{\frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x\right\} ঃ \left\{\frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x\right\}$$

উদাহরণ 5. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}} = 5$ হলে, x এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}} = 5$

$\therefore \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}+\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}-\sqrt{5}+\sqrt{5-x}} = \frac{5+1}{5-1}$, [যোজন – বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5-x}} = \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{5}{5-x} = \frac{9}{4}$, [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $5 \times 4 = 9 \times 5 - 9x$ বা, $9x = 45 - 20 = 25$

$\therefore x = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$, $2a > b > 0$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b}{x}$

সুতরাং, $\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b+x}{b-x}$, [যোজন – বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b+x}{b-x}$ বা, $\dfrac{(a+x)}{-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b+x}{b-x}$

$\therefore$ $\dfrac{(a+x)^2}{a^2-x^2}=\dfrac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$

ফলে, $\dfrac{a+x+a-x}{a+x-a+x}=\dfrac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$, [যোজন – বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2a}{2x}=\dfrac{2(b^2+x^2)}{4bx}$ বা, $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b^2+x^2}{2bx}$

বা, $a=\dfrac{b^2+x^2}{2b}$ [উভয়পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^2+b^2=2ab$ বা, $x^2=2ab-b^2$

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{2ab-b^2}$

উদাহরণ 7. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\dfrac{xyz}{abc}$

সমাধান : মনে করি, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$

$\therefore$ $x=ak, y=bk, z=ck$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{(ak)^3+(bk)^3+(ck)^3}{a^3+b^3+c^3}$$

$$=\frac{a^3k^3+b^3k^3+c^3k^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{k^3(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3}=k^3$$

$$\text{ডানপক্ষ}=\frac{xyz}{abc}=\frac{ak.bk.ck}{abc}=\frac{abck^3}{abc}=k^3$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 8. যদি $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c+d}{d+a}$ বা, $\dfrac{a+b}{b+c}-1=\dfrac{c+d}{d+a}-1$

বা, $\dfrac{a+b-b-c}{b+c} - \dfrac{c+d-d-a}{d+a} = 0$ বা, $\dfrac{a-c}{b+c} + \dfrac{a-c}{d+a} = 0$

বা, $(a-c)\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{d+a}\right) = 0$ বা, $(a-c)(d+a+b+c) = 0$

$\therefore$ হয় $a-c=0$ অর্থাৎ, $a=c$

অথবা, $a+b+c+d=0$

উদাহরণ 9. সমানুপাতের ধর্ম ব্যবহার করে দেখাও যে,

$x = \dfrac{4ab}{a+b}$ হলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a} + \dfrac{x+2b}{x-2b} = 2,\ a \neq b.$

সমাধান : দেওয়া আছে , $x = \dfrac{4ab}{a+b}$

$\therefore \dfrac{x}{2a} = \dfrac{4ab}{2a(a+b)}$ বা, $\dfrac{x}{2a} = \dfrac{2b}{a+b}$

$\therefore \dfrac{x+2a}{x-2a} = \dfrac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন – বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+2a}{x-2a} = \dfrac{3b+a}{b-a}$

আবার, $\dfrac{x}{2b} = \dfrac{2a}{a+b}$

$\therefore \dfrac{x+2b}{x-2b} = \dfrac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন – বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+2b}{x-2b} = \dfrac{3a+b}{a-b}$

$$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$$

$$= \frac{3b+a-3a-b}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2.$$

উদাহরণ 10. যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$$

সমাধান : মনে করি, $ax = by = cz = k$

$$\therefore x = \frac{k}{a},\ y = \frac{k}{b},\ z = \frac{k}{c}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{zx} + \dfrac{z^2}{xy} = \dfrac{k^2}{a^2} \times \dfrac{bc}{k^2} + \dfrac{k^2}{b^2} \times \dfrac{ca}{k^2} + \dfrac{k^2}{c^2} \times \dfrac{ab}{k^2}$

$= \dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ca}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2} =$ ডানপক্ষ।

প্রশ্নমালা 5.1

1. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?
2. একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।
3. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3 : 4$ এবং তাদের ল. সা. গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
4. $x : y = 5 : 6$ হলে, $3x : 5y =$ কত?
5. $3{\cdot}5 : 4{\cdot}9$ কে $1 : x$ আকারে প্রকাশ কর।
6. একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত $1 : 4$. অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।
7. একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হল। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।
8. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত $7 : 2$ এবং 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত $8 : 3$ হবে। তাদের বর্তমান বয়স কত?
9. A ও B সমবেগে নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে t_1 এবং $(t_1 + t_2)$ মিনিটে। A ও B এর গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।
10. একটি বাতি থেকে p মিটার দূরে দণ্ডায়মান r মিটার লম্বা একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য s মিটার হলে, বাতিটার উচ্চতা কত? [দেওয়া আছে, ছায়া উচ্চতার সমানুপাতিক]
    [**সংকেত :** বাতির পাদবিন্দু ও ছায়ার প্রান্তবিন্দুর মাঝামাঝি কোনো খুঁটি নিলে তার দৈর্ঘ্য $\frac{x}{2}$ এবং তার ছায়ার দৈর্ঘ্য $\frac{p+s}{2}$ হবে।]
11. যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে নিম্নলিখিত দাবিগুলো প্রমাণ কর :

    (i) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

    (iii) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$ (iv) $\dfrac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

    (v) $a-2b+c = \dfrac{(a-b)^2}{a} = \dfrac{(b-c)^2}{c}$
12. সমাধান কর : (i) $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{3}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

    (iii) $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}} = 1, 0 < b < 2a < 2b$ (iv) $\dfrac{b+x+\sqrt{b^2-x^2}}{b+x-\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{b}{x}$
13. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, (i) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

    (ii) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ac+bd}{ac-bd} = \dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

14. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$ (ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

15. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2-\frac{2p}{x}+1=0$.

16. $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-3mx^2+3x-m=0$.

17. $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0$.

18. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a , b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

19. $\frac{a^3+b^3}{a-b+c}=a(a+b)$ হলে, প্রমাণ কর যে, a , b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

20. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$.

21. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

22. $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

23. $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$ হলে, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ এর মান কত?

24. $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে,

দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাতের মান $=\frac{1}{a+b+c}$.

25. যদি $(a+b+c)p=(b+c-a)q=(c+a-b)r=(a+b-c)s$ হয়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$.

26. যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ এবং x , y, z সকলে পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা, $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

[ইঙ্গিত : মনে কর, $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$ এবং $x\neq y$ ফলে, $x=k(y+z)$, $y=k(z+x)$,
সুতরাং $x-y=k(y-x)$. $k=-1$]

27. যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{zx} + \dfrac{z^2}{xy} = \dfrac{mn}{l^2} + \dfrac{nl}{m^2} + \dfrac{lm}{n^2}$.

28. যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = \dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{ca} + \dfrac{c^2}{ab}$.

29. সমাধান কর :

(i) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}} = 5$ (ii) $\dfrac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}} = c$

(iii) $81\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3 = \dfrac{1+x}{1-x}$

ধারাবাহিক অনুপাত

মনে কর, ক এর আয় 1000 টাকা, খ এর আয় 1500 টাকা এবং গ এর আয় 1125 টাকা

ক এর আয় ঃ খ এর আয় = 1000 ঃ 1500 = 2 ঃ 3

খ এর আয় ঃ গ এর আয় = 1500 ঃ 1125 = 4 ঃ 3

∴ ক এর আয় ঃ খ এর আয় ঃ গ এর আয় = 8 ঃ 12 ঃ 9

দুইটি অনুপাত যদি ক ঃ খ এবং খ ঃ গ আকারের হয়, তাহলে তাদেরকে সাধারণত ক ঃ খ ঃ গ আকারে লেখা হয়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়। যেকোনো দুইটি (ততোধিক) প্রদত্ত অনুপাতকে এই আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। এখানে লক্ষণীয় যে, দুইটি অনুপাতকে ক ঃ খ ঃ গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশি, দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান হতে হবে। যেমন, 2 ঃ 3 এবং 4 ঃ 3 অনুপাত দুইটি ক ঃ খ ঃ গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশিটিকে দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান করতে হবে।

এখন, 2 ঃ 3 = $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\times4}{3\times4} = \dfrac{8}{12}$ আবার, 4 ঃ 3 = $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4\times3}{3\times3} = \dfrac{12}{9}$.

অতএব 2 ঃ 3 এবং 4 ঃ 3 অনুপাত দুইটি ক ঃ খ ঃ গ আকারে হবে 8 ঃ 12 ঃ 9

লক্ষ কর যে, ক ঃ গ = 1000 ঃ 1125 = 8 ঃ 9, যা কিনা ক ঃ খ ঃ গ = 8 ঃ 12 ঃ 9 আকার থেকে প্রাপ্ত অনুপাতের সমান।

উদাহরণ 11. ক, খ ও গ এক জাতীয় রাশি এবং ক ঃ খ = 3 ঃ 4, খ ঃ গ = 5 ঃ 6 হলে, ক ঃ খ ঃ গ = কত?

সমাধান : $\dfrac{\text{ক}}{\text{খ}} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3\times5}{4\times5} = \dfrac{15}{20}$ অথবা, $\dfrac{\text{খ}}{\text{গ}} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{5\times4}{6\times4} = \dfrac{20}{24}$

∴ ক ঃ খ ঃ গ = 15 ঃ 20 ঃ 24

উদাহরণ 12. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5; কোণ তিনটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°

মনে করি, কোণ তিনটি প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে যথাক্রমে $3x$, $4x$ এবং $5x$.

প্রশ্নানুসারে, $3x + 4x + 5x = 180^\circ$ বা, $12x = 180^\circ$ বা, $x = 15^\circ$

অতএব, কোণত্রয় হল $3x = 3\times15^\circ = 45^\circ$

$4x = 4\times15^\circ = 60^\circ$

$5x = 5\times15^\circ = 75^\circ$

সমানুপাতিক ভাগ

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়। s কে a ঃ b ঃ c ঃ d অনুসারে ভাগ করতে হলে, s কে মোট $(a+b+c+d)$ ভাগ করে যথাক্রমে a, b, c ও d ভাগ নিতে হয়।
অতএব নির্ণেয়,

১ম অংশ = s এর $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{sa}{a+b+c+d}$

২য় অংশ = s এর $\dfrac{b}{a+b+c+d} = \dfrac{sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ = s এর $\dfrac{c}{a+b+c+d} = \dfrac{sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ অংশ = s এর $\dfrac{d}{a+b+c+d} = \dfrac{sd}{a+b+c+d}$

এভাবে যেকোনো রাশিকে যেকোনো সংখ্যক নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

উদাহরণ 13. তিন ব্যক্তির মধ্যে 5100 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন, ১ম ব্যক্তির অংশ ঃ ২য় ব্যক্তির অংশ ঃ ৩য় ব্যক্তির অংশ $= \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ হয়।

সমাধান : এখানে, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{2} \times 18\right) : \left(\frac{1}{3} \times 18\right) : \left(\frac{1}{9} \times 18\right) = 9 : 6 : 2.$

মনে করি, মোট টাকার পরিমাণ = s এবং তিন ব্যক্তির প্রাপ্ত টাকার অনুপাত = a ঃ b ঃ c

∴ ১ম ব্যক্তির অংশ = s এর $\dfrac{a}{a+b+c}$ = 5100 এর $\dfrac{9}{9+6+2}$ = 5100 এর $\dfrac{9}{17}$ = 2700 টাকা।

২য় ব্যক্তির অংশ = s এর $\dfrac{b}{a+b+c}$ = 5100 এর $\dfrac{6}{9+6+2}$ = 5100 এর $\dfrac{6}{17}$ = 1800 টাকা।

৩য় ব্যক্তির অংশ = s এর $\dfrac{c}{a+b+c}$ = 5100 এর $\dfrac{2}{9+6+2}$ = 5100 এর $\dfrac{2}{17}$ = 600 টাকা।

উত্তর : 2700 টাকা, 1800 টাকা , 600 টাকা।

প্রশ্নমালা 5.2

1. আজিজ, আবেদ এবং আশিক এর মধ্যে 860 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, আজিজ 5 টাকা পেলে আবেদ পায় 4 টাকা, আবার আবেদ 3 টাকা পেলে আশিক পায় 4 টাকা।
2. ক, খ, গ ও ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ ঃ খ এর অংশ = 2 ঃ 3, খ এর অংশ ঃ গ এর অংশ = 1 ঃ 2 এবং গ এর অংশ ঃ ঘ এর অংশ = 3 ঃ 2 হয়।
3. তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?
4. ক্রিকেট খেলায় বুলবুল, নান্নু ও আকরাম মোট 171 রান করলো। বুলবুল ও নান্নুর এবং নান্নু ও আকরামের রানের অনুপাত 3 ঃ 2 হলে, কে কত রান করেছে?

5. একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 50,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পাবে?

6. রায়হানা বেগম মৃত্যুকালে 24075 টাকা রেখে মারা গেলেন। দাফনকার্যে 675 টাকা ব্যয় হল। অবশিষ্ট টাকা স্বামী, মা এবং কন্যাদ্বয়ের মধ্যে $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ অনুপাতে বিভক্ত হল। প্রত্যেক কন্যা কত পেল?

7. একটি সমিতির নেতা নির্বাচনে সায়েম সাহেব 4 : 3 ভোটে জয়লাভ করলেন। যদি মোট সদস্য সংখ্যা 581 হয় এবং 91 জন সদস্য ভোট না দিয়ে থাকে, তবে সায়েম সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী কত ভোটের ব্যবধানে পরাজিত হয়েছেন?

8. ক্রয়মূল্য : বিক্রয়মূল্য = 5 : 6, এতে শতকরা কত লাভ হবে?

9. কাগজের পূর্বমূল্য : বর্তমান মূল্য = 2 : 3, পূর্বের তুলনায় মূল্য শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে?

10. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ 10% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

11. একটি কাঠের পুল তৈরির প্রাক্কলিত ব্যয় 90,000 টাকা। কিন্তু খরচ বেশি হয়েছে 21,600 টাকা। খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে?

12. ধানে চাল ও তুষের অনুপাত 7 : 3 হলে, এতে শতকরা কী পরিমাণ চাল আছে?

13. একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7. ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 30·4 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পর তার ফলন কত হবে?

14. ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 হলে এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হলে, 1 কুইন্টাল ধান থেকে উৎপন্ন চাল ও 1 কুইন্টাল গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত বের কর।

15. 1 ঘন সে. মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

16. একটি জমির ক্ষেত্রফল 588 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 3 হলে, অপর জমিটির ক্ষেত্রফল কত?

17. রেজা ও মনজু একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% হার সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ধার করে। রেজা 2 বছর পর মুনাফা–আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর মনজু মুনাফা–আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত কী ছিল?

18. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 18 সে. মি। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. 674 টাকাকে $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

20. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 6 এবং তাদের গ. সা. গু. 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. কত?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। $x : y$ এর ব্যস্তানুপাত হবে -

ক. $x : y$ খ. $y : z$

গ. $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ ঘ. $\sqrt{x} : \sqrt{y}$

২। i. $a : b = b : c$ হলে, $ac = b^2$

ii. $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ হলে, $\frac{x+y}{x} = \frac{p+q}{q}$

iii. $m : n = x : y$ হলে, $mx = ny$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও iii খ. i ও ii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৩ - ৫) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :
বর্গক্ষেত্রে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত হল। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r .

৩। **নিচের কোনটি বৃত্তের পরিধির মান নির্দেশ করে ?**

ক. $4\pi r^2$ খ. πr^2

গ. $2\pi r$ ঘ. $2\pi r^2$

৪। **নিচের কোনটি বৃত্ত এবং বর্গের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ?**

ক. $4 : \pi$ খ. $\pi : 4$

গ. $2 : r$ ঘ. $r : 2$

৫। **নিচের কোনটি বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে ?**

ক. $2r$ খ. $2\sqrt{2}\,r$

গ. $4r$ ঘ. $4\sqrt{2}\,r$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য ও কর্ণের অনুপাত $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$

ক. জমির কর্ণসহ চিত্র অঙ্কন কর এবং প্রদত্ত অনুপাতকে $a : b$ আকারে প্রকাশ কর।

খ. জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং কর্ণের অনুপাত নির্ণয় কর।

গ. আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার হলে, তার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

এক চলকবিশিষ্ট গাণিতিক খোলা বাক্য

বাক্য গঠন করতে যেমন শব্দ বা শব্দগুচ্ছ, ক্রিয়াপদ ইত্যাদির প্রয়োজন হয় গণিতেও তেমনি শব্দ বা শব্দগুচ্ছ, ক্রিয়াপদ দিয়ে বাক্য গঠন করতে হয়।

গাণিতিক বাক্যে শব্দ হিসেবে বিভিন্ন প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যেমন, সেট নির্দেশে N, Z, Q, R ইত্যাদি অক্ষর প্রতীক, রাশি নির্দেশে সংখ্যা ও তাদের কার্যবিধি দিয়ে গঠিত $5 + 8$, 2×3 ইত্যাদি। এ সকল গাণিতিক শব্দাবলি যখন ক্রিয়াপদ দিয়ে যুক্ত হয়, তখন গাণিতিক বাক্য হয়।

গণিতের ক্রিয়াপদ হল "সমান হওয়া" , "বড় হওয়া ", "ছোট হওয়া" ইত্যাদি বা তাদের প্রতীক। যেমন, $5 + 8 = 13$, $2 \times 3 > 4$, $10 < 13$, এগুলো হল গাণিতিক বাক্য।

সেট সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা যদি লিখি , $A = \{ x \in R : 1 \leq x \leq 20 \}$, তবে $x \in R$ এর অর্থ হচ্ছে x এর মান 1 থেকে 20 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা। x এর বিচরণ ক্ষেত্র 1 থেকে 20 পর্যন্ত বিস্তৃত। এ ক্ষেত্রে x কে বলা হয় একটি চলক বা চল। অতএব বলা যায়, যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের কোনো সংখ্যাকে বোঝায়, তাকে চলক বা চল বলে। যে সেট বা ক্ষেত্র থেকে চলক তার মান সংগ্রহ করে তাকে চলকের ডোমেন বলে।

লক্ষ করি, $x + 3 = 10$, এ বাক্যটি সত্য না মিথ্যা তা x এর মান জানা না থাকলে সঠিক উত্তর দেওয়া যাবে না। এ বাক্যে x অজানা কিন্তু নির্দিষ্ট একটি সংখ্যা নির্দেশ করছে। x এর একটি ডোমেন বা বিচরণ ক্ষেত্র আছে, যেখান থেকে x তার মান গ্রহণ করতে পারে। সাধারণত R (বাস্তব সংখ্যার সেট) কে x এর ডোমেন ধরা হয়, তবে কোনো কোনো ক্ষেত্রে Q (মূলদ সংখ্যার সেট) কে ডোমেন হিসেবে ব্যবহার করা হয়। ওপরের বাক্যে x হল চলক এবং এর ডোমেন R. R থেকে x এর মান যদি 7 গ্রহণ করা হয়, তবেই মাত্র ওপরের বাক্যটি সত্য।

কোনো চল সম্বলিত গাণিতিক বাক্যকে খোলা বাক্য বলা হয়। কোনো গাণিতিক বাক্য সত্য না মিথ্যা নিশ্চিতভাবে বলা সম্ভব হলে, ঐ বাক্যকে গাণিতিক উক্তি বলে। যেমন, $2 + 3 = 5$, $8 - 3 = 5$ হল গাণিতিক উক্তি; $x + 12 = 17$ হল গাণিতিক খোলা বাক্য।

সমান চিহ্ন সম্বলিত খোলা বাক্যকে সমীকরণ বলে। খোলা বাক্যের চলকের যে যে মানের জন্য বাক্যটি সত্য হয়, তাকে (বা তাদেরকে) সমীকরণের মূল বলে। সমীকরণের মূলের সেটকে সমাধান সেট বলা হয়। সমীকরণের মূলকে কখনও কখনও সমীকরণের বীজও বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ , $x + 3 = 10$, একটি সমীকরণ।

সমীকরণটির সমাধান সেট $\{ 7\}$. কারণ, x এর মান শুধু 7 হলেই $x + 3 = 10$ গাণিতিক বাক্যটি সত্য হয়।

$x + 3 = 10$ সমীকরণটি নানা ধরনের সমস্যা প্রকাশ করতে পারে। যেমন,

"তিন এর সাথে কত যোগ করলে দশ হয়?"

"মুসার তিন টাকা আছে, আর কত টাকা হলে দশ টাকা হবে?"

"সীমার তিনটি জামা আছে, আর কতটি জামা হলে দশটি জামা হবে?"

"টেম্পোতে তিনজন যাত্রী আছে, আর কতজন যাত্রী হলে দশজন যাত্রী হবে? " ইত্যাদি।

সমীকরণের সমান চিহ্নের বাম দিকের রাশিকে বামপক্ষ এবং ডান দিকের রাশিকে ডানপক্ষ বলা হয়।

যেমন, $5x - 4 = 3x + 8$ সমীকরণে $5x - 4$ বামপক্ষ, $3x + 8$ ডানপক্ষ এবং x চলক বা অজ্ঞাত রাশি।

ওপরের সমীকরণে x এর ঘাত 1, এটি একটি সরল সমীকরণ। যে সমীকরণে প্রথম ঘাত বিশিষ্ট একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে প্রথম ঘাতের সমীকরণ বা সরল সমীকরণ (Simple equation) বলা হয়। $x^2 - 4x = x + 6$ সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই। এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যে সমীকরণে সর্বোচ্চ দ্বিতীয় ঘাত বিশিষ্ট একটি চলক থাকে, তাকে বলে দ্বিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণ সমাধানের জন্য কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধের সাহায্য নেওয়া হয়। যেমন,

স্বতঃসিদ্ধ 1. সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে যোগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 2. সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 3. সমান সমান রাশিকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 4. সমান সমান রাশিকে সমান সমান অশূন্য সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল সমান হয়।

এ সকল স্বতঃসিদ্ধ ছাড়া, সমীকরণের অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয়ে আরও কয়েকটি নিয়ম অনুসরণীয়।
(i) সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটিকে সাধারণত বামপক্ষে রাখা হয়।
(ii) কোনো রাশিকে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে বা ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে আনতে হলে, চিহ্নের পরিবর্তন করতে হয়। একে পক্ষান্তর পদ্ধতি বলা হয়ে থাকে। প্রকৃতপক্ষে এটি স্বতঃসিদ্ধ 2 এর প্রয়োগ মাত্র।
(iii) সমীকরণ যদি $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ আকারের হয়, তবে $ad = bc$ হয় [উভয়পক্ষে bd দ্বারা গুণ করে]। এক পক্ষের লবের সঙ্গে অন্য পক্ষের হরের গুণফল দুইটি সমান হয়। একে আড়গুণন বলা হয়। এক পক্ষ ভগ্নাংশ, অপর পক্ষ পূর্ণ সংখ্যা হলেও এ নিয়ম ঘটে। কারণ, যেকোনো পূর্ণ সংখ্যাকে ভগ্নাংশ হিসেবে বিবেচনা করা যায় যার হর 1;
যেমন, $c = \frac{c}{1}$. যদি $\frac{a}{b} = c$ হয়, তবে $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ বা, $a = bc$
বিপরীত ক্রমে, $bd \neq 0$ এবং $ad = bc$ হলে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
উপরিউক্ত বিধিগুলো এক বা একাধিক বার ব্যবহার করে একটি সমীকরণকে অপর একটি সমীকরণে রূপান্তরিত করলে যে সমীকরণ পাওয়া যায়, তা প্রদত্ত সমীকরণের সমতুল। এই প্রক্রিয়ায় যেকোনো সরল সমীকরণকে $ax = b$ আকারে প্রকাশ করা যায়। এখানে $a \neq 0$ হলে, শেষোক্ত সমীকরণের বীজ $x = \frac{b}{a}$ রূপে পাওয়া যায়। নিচে সমীকরণ সমাধানের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{y}{a} + a = \frac{y}{b} + b$. [যেখানে $a \neq b$]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{y}{a} + a = \frac{y}{b} + b$.

বা, $\frac{y}{a} - \frac{y}{b} = b - a$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{by - ay}{ab} = b - a$ বা, $\frac{y(b-a)}{ab} = b - a$

$\therefore \frac{y}{ab} = 1$ [উভয়পক্ষে $b - a \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y = ab$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $y = ab$.

দুইটি ভগ্নাংশের লব সমান কিন্তু হর অসমান এবং ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান হলে লব শূন্য হবে। এই ধারণা ব্যবহার করলে কখনও কখনও সমাধান প্রক্রিয়া খুব সহজ হয়। নিচের উদাহরণ লক্ষ করি :

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{x+5+x+2}{(x+2)(x+5)}=\frac{x+3+x+4}{(x+4)(x+3)}$

বা, $\frac{2x+7}{x^2+7x+10}=\frac{2x+7}{x^2+7x+12}$

ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান; এদের লব সমান কিন্তু হর অসমান।

সুতরাং, $2x+7=0$ বা, $2x=-7$

$\therefore x=\frac{-7}{2}=-\frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=-\frac{7}{2}$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $2z+\sqrt{2}=3z-4-3\sqrt{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $2z+\sqrt{2}=3z-4-3\sqrt{2}$

সুতরাং $2z-3z=-4-3\sqrt{2}-\sqrt{2}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-z=-4-4\sqrt{2}$

বা, $-z=-(4+4\sqrt{2})$

$\therefore z=4+4\sqrt{2}=4(1+\sqrt{2})$ [উভয়পক্ষে -1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $z=4(1+\sqrt{2})$.

অনেক সময় ভগ্নাংশ সম্বলিত সমীকরণের সমাধানে বিবিধ কৌশল অবলম্বন করা হয়। এ ধরনের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল। অভিজ্ঞতা ও অভ্যাসই সমীকরণ সমাধানে কৃতকার্যতার প্রধান অবলম্বন।

উদাহরণ 4. সমাধান সেট নির্ণয় কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

সমাধান : দেওয়া আছে , $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

$\therefore \frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4)=4(7x-1)$ [আড়গুণন করে]

বা, $30x-60=28x-4$

বা, $2x=56$

$\therefore x=\frac{56}{2}=28$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{28\}$

কখনও কখনও দ্বিঘাত আকারের সমীকরণ থাকলে তাকে সরল সমীকরণে প্রকাশ করে সমাধান সেট বের করা যায়।

উদাহরণ 5. সমাধান সেট নির্ণয় কর : $\frac{2}{t-1}+\frac{3}{t+1}=\frac{5}{t}$

সমাধান : $2t(t+1)+3t(t-1)=5(t-1)(t+1)$

[উভয়পক্ষকে t, $t-1$ এবং $t+1$ এর ল. সা. গু. দিয়ে গুণ করে।]

বা, $2t^2+2t+3t^2-3t=5(t^2-1)$

বা, $-t=-5$

বা, $t=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\{5\}$

প্রশ্নমালা 6.1

সমাধান কর (প্রশ্ন 1 থেকে 10) :

1. $5x-3=2x+9$
2. $\frac{ax}{b}-\frac{bx}{a}=a^2-b^2$
3. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$
4. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$
5. $\sqrt{3}x-2=2\sqrt{3}+4$
6. $(\sqrt{5}+5)y+4=9+5\sqrt{5}$
7. $\frac{2z-6}{9}+\frac{15-2z}{12-5z}=\frac{4z-15}{18}$
8. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$
9. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$
10. $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (প্রশ্ন 11 থেকে 20):

11. $\frac{x+a}{x-b}=\frac{x+a}{x+c}$, $[\,b+c\neq 0]$
12. $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$
13. $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\frac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\frac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$
14. $\frac{x-2}{x-1}=2-\frac{1}{x-1}$
15. $x(x^2+1)=2x^2+2$
16. $\frac{x}{x-2}=3$
17. $\frac{p}{p-x}+\frac{q}{q-x}=\frac{p+q}{p+q-x}$
18. $\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}=\frac{2}{z-1}$
19. $\frac{2z-1}{2z+1}=\frac{3z-1}{3z+2}$
20. $\sqrt{2x-3}+5=2$

সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য : $c^2 + d(2c + d) = c(c + 2d) + d^2$ একটি অভেদ। উভয়পক্ষের রাশিমালা দেখতে ভিন্ন হলেও কার্যত এরা একই। c ও d এর যেকোনো মানের জন্য উভয়পক্ষের মান একই হবে। সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির কোনো কোনো (এক বা একাধিক) নির্দিষ্ট মানের জন্য উভয়পক্ষ সমান হয়। কিন্তু অভেদে অজ্ঞাত রাশির সকল মানের জন্য উভয়পক্ষ সমান হয়। বীজগণিতের সূত্রগুলো প্রত্যেকটিই অভেদ।

সরল সমীকরণের ব্যবহার

সমীকরণে যে চলক (অক্ষর) ব্যবহার করা হয় তা সংখ্যার জন্য, রাশির জন্য নয়। তাই আমরা বলি, "মনে করি, গাছটির উচ্চতা x মিটার বা ছাত্রের সংখ্যা x"। আমরা বলি না, "মনে করি, গাছের উচ্চতা x"।

বীজগাণিতিক সমস্যা সমাধান প্রক্রিয়া নিম্নলিখিত স্তরে ভাগ করা যায়।

(i) প্রয়োজনীয় সংখ্যা বোঝানোর জন্য চলক (অক্ষর) ধরে নিতে হয়।

(ii) সম্ভব হলে প্রশ্নানুসারে প্রতিটি উক্তিতে সংশ্লিষ্ট অক্ষর যুক্ত করতে হয়।

(iii) প্রশ্নের বিভিন্ন অংশ সংযোগ করে সমীকরণ তৈরি করতে হয়। এ সমীকরণ প্রথম ঘাত বা দ্বিতীয় ঘাত বিশিষ্ট হতে পারে।

সমীকরণ সমাধান করলে সঠিক উত্তর পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 6. গাড়ি যোগে ক থেকে খ স্থানে পৌঁছতে এক ব্যক্তির সময় লাগল দেড় ঘণ্টা। স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব 96 কি. মি.। গতি পথে রাস্তার কতকাংশ ঢালু ছিল; সেখানে গাড়ির গতিবেগ ছিল ঘণ্টায় 72 কি. মি., বাকি পথে ছিল 48 কি. মি.। ঐ পথের কত কি. মি. ঢালু ছিল?

সমাধান : মনে করি, ঢালু রাস্তার দৈর্ঘ্য x কি. মি.।
বাকি রাস্তার দৈর্ঘ্য $96 - x$ কি. মি.

ঘণ্টায় 72 কি. মি. বেগে x কি. মি. যেতে সময় লাগে $\frac{x}{72}$ ঘণ্টা।

" 48 " " $96 - x$ " " " " $\frac{96-x}{48}$ "

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{72} + \frac{96-x}{48} = \frac{3}{2}$ $\left[\because 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right]$

বামপক্ষ $= \frac{2x + 3(96-x)}{144} = \frac{2x + 288 - 3x}{144} = \frac{288 - x}{144}$

সুতরাং, $\frac{288-x}{144} = \frac{3}{2}$ বা, $\frac{288-x}{72} = 3$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3 \times 72 = 288 - x$ বা, $x = 288 - 216$ বা, $x = 72$

উত্তর : 72 কি. মি. পথ ঢালু ছিল।

উদাহরণ 7. একটি কারখানায় দৈনিক মজুরি প্রতি দক্ষ শ্রমিকের 150 টাকা এবং অদক্ষ শ্রমিকের 120 টাকা। মোট শ্রমিকের সংখ্যা 400 এবং দৈনিক মজুরি 52,800 টাকা হলে, দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা x
অদক্ষ " " $400 - x$
দক্ষ শ্রমিকের দৈনিক মজুরি $150x$ টাকা
অদক্ষ " " " $120(400 - x)$ টাকা
প্রশ্নমতে, $150x + 120(400 - x) = 52,800$

বা, $15x + 12(400 - x) = 5280$ [উভয়পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $15x + 4800 - 12x = 5280$ বা, $3x = 5280 - 4800$ বা, $3x = 480$ বা, $x = \frac{480}{3} = 160$

উত্তর : দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা $=160$

উদাহরণ 8. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্ক দুইটির অন্তর 2; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম। সংখ্যাটি কত?

সমাধান : এক্ষেত্রে একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানে বসালে সংখ্যাটির মান বেড়ে যায় বিধায় একক স্থানীয় অঙ্ক, দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা বড়।

মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক $= x$ $\therefore$ একক স্থানীয় অঙ্ক $= x + 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + (x + 2) = 11x + 2$

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি হয়, $10(x + 2) + x = 11x + 20$

প্রশ্নমতে, $2(11x + 2) - 6 = 11x + 20$ বা, $22x + 4 - 6 = 11x + 20$ বা, $22x - 11x = 20 + 2$

বা, $11x = 22$ বা, $x = \frac{22}{11} = 2$

$\therefore$ সংখ্যাটির দশকের অঙ্ক 2; ফলে সংখ্যাটির এককের অঙ্ক $2 + 2 = 4$

উত্তর : সংখ্যাটি 24.

প্রশ্নমালা 6.2

1. একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{3}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 100 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
2. $\frac{3}{5}$ এর লব ও হরের সাথে কোনো একই সংখ্যা যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{4}{5}$ হয়?
3. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ এবং হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ গঠিত হয়, তা $\frac{1}{6}$ এর সমান হলে ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
4. একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47. মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা। মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?
5. ABC ত্রিভুজে A কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান। A কোণ ও B কোণের (পরিমাণের) অনুপাত 9 : 4 হলে, C কোণের পরিমাণ কত?
6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাত গুণ।
7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
8. 120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও দশ পয়সার মুদ্রা একত্রে 27 টাকা হলে, কোন প্রকার মুদ্রার সংখ্যা কত?
9. এক ব্যক্তি গাড়ি যোগে ঘণ্টায় 60 কি. মি. বেগে কিছুদূর অতিক্রম করে ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করে 5 ঘণ্টায় মোট 240 কি. মি. গমন করেন। 60 কি. মি. বেগে কতদূর গিয়েছিলেন?
10. একটি শ্রেণীর প্রতি বেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসলে 3 খানা বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতি বেঞ্চে 3 জন করে বসলে 6 জন ছাত্রের দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত?
11. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 199 হলে, বড় সংখ্যাটি কত?
12. এক ব্যক্তি 5600 টাকার কিছু টাকা বিনিয়োগ করেন 5% সরল মুনাফায়, অবশিষ্ট 4% সরল মুনাফায়। বছর শেষে 256 টাকা মুনাফা পেলেন। 5% হারে কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?

অসমতা

সমীকরণ সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ বা বিধিসমূহ অসমতার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। শুধু ব্যতিক্রম হল অসমান রাশিকে সমান সমান ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পাল্টে যায়।

$4 < 6$ অসমতাটি লক্ষ করি।

$\therefore 4+2 < 6+2$ বা, $6 < 8$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

তদ্রুপ $2 < 4$ [উভয়পক্ষ থেকে 2 বিয়োগ করে]

" $8 < 12$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

" $2 < 3$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

অসমতাটির উভয়পক্ষকে -2 দ্বারা গুণ করলে আলাদাভাবে পাওয়া যায় -8 এবং -12

এখানে $-8 > -12$. তেমনি $-2 > -3$ [উভয়পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করে]

সাধারণভাবে বলা যায়, যদি $a < b$ হয়, তবে,

	$a+c < b+c$	c এর যেকোনো মানের জন্য
	$a-c < b-c$	c " " " "
	$ac < bc$	c এর ধনাত্মক মানের জন্য
	$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	c " " " "
কিন্তু	$ac > bc$	c এর ঋণাত্মক মানের জন্য
	$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	c " " " "

উদাহরণ 9. সমাধান কর ও সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখাও : $3x + 4 > 16$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $3x + 4 > 16$

$\therefore 3x + 4 - 4 > 16 - 4$ [উভয়পক্ষ থেকে 4 বিয়োগ করে]

বা, $3x > 12$

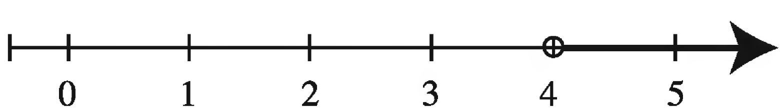
বা, $\frac{3x}{3} > \frac{12}{3}$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x > 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x > 4$

এখানে সমাধান সেট, $S = \{ x \in R : x > 4 \}$

সমাধান সেটটি নিম্নে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হল। 4 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান এবং সমাধান সেট, $S = \{ x \in R : x > 4 \}$



উদাহরণ 10. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও : $x - 9 > 3x + 1$.

সমাধান : দেওয়া আছে , $x - 9 > 3x + 1$

$\therefore x - 9 + 9 > 3x + 1 + 9$

বা, $x > 3x + 10$

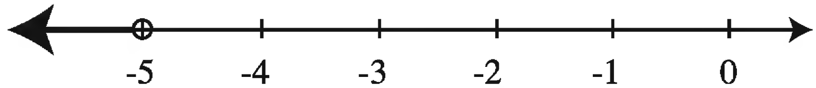
বা, $x - 3x > 3x + 10 - 3x$

বা, $-2x > 10$

বা, $\dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{10}{-2}$ [উভয়পক্ষকে ঋণাত্মক সংখ্যা -2 দ্বারা

বা, $x < -5$ ভাগ করায় অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < -5$



এবং সমাধান সেট, $S = \{ x \in R : x < -5 \}$. -5 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান।

বি: দ্র : সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতা দ্বারা প্রকাশ পায়। অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট।

$a \geq b$ এর অর্থ, $a > b$ অথবা $a = b$

অর্থাৎ, শুধু $a < b$ হলেই $a \geq b$ মিথ্যা হয়।

অতএব, $4 > 3$ এবং $4 \geq 4$ দুইটি উক্তিই সত্য।

উদাহরণ 11. সমাধান কর : $a(x + b) < c$, [$a \neq 0$]

সমাধান : a ধনাত্মক হলে, $\dfrac{a(x+b)}{a} < \dfrac{c}{a}$, উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে পাই,

$x + b < \dfrac{c}{a}$

বা, $x < \dfrac{c}{a} - b$

a ঋণাত্মক হলে একই প্রক্রিয়ায় পাই, $\dfrac{a(x+b)}{a} > \dfrac{c}{a}$

বা, $x + b > \dfrac{c}{a}$

বা, $x > \dfrac{c}{a} - b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : (i) $x < \dfrac{c}{a} - b$, যদি $a > 0$ হয়,

(ii) $x > \dfrac{c}{a} - b$, যদি $a < 0$ হয়।

বি: দ্র : a যদি শূন্য এবং c যদি ধনাত্মক হয়, তবে x এর যেকোনো মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে। কিন্তু a যদি শূন্য এবং c ঋণাত্মক হয়, তবে অসমতাটির কোনো সমাধান থাকবে না।

প্রশ্নমালা 6.3

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও :

1. $y - 3 < 5$ 2. $3(x - 2) < 6$ 3. $3x - 2 > 2x - 1$ 4. $z \leq \dfrac{1}{2}z + 3$

5. $8 \geq 2 - 2x$ 6. $x \leq \dfrac{x}{3} + 4$ 7. $5(3 - 2t) \leq 3(4 - 3t)$ 8. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} > \dfrac{47}{60}$.

অসমতার ব্যবহার

সমীকরণের সাহায্যে তোমরা সমস্যা সমাধান করতে শিখেছ। একই পদ্ধতিতে অসমতা সম্পর্কিত সমস্যারও সমাধান করতে পারবে।

উদাহরণ 12. কোনো পরীক্ষায় বাংলা ১ম ও ২য় পত্রে টিনা পেয়েছে যথাক্রমে $5x$ এবং $6x$ নম্বর এবং কুমকুম পেয়েছে $4x$ এবং 84 নম্বর। কোনো পত্রে কেউ 40 এর নিচে পায়নি। বাংলা বিষয়ে কুমকুম হয়েছে প্রথম এবং টিনা হয়েছে দ্বিতীয়। x এর সম্ভাব্য মান অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : টিনা পেয়েছে মোট $5x + 6x$ নম্বর এবং কুমকুম পেয়েছে $4x + 84$ মোট নম্বর ।

প্রশ্নমতে, $5x + 6x < 4x + 84$

বা, $5x + 6x - 4x < 84$

বা, $7x < 84$

বা, $x < \frac{84}{7}$

বা, $x < 12$

তদুপরি, $4x \geq 40$ [$\because$ $4x$ সর্বনিম্ন নম্বর]

উত্তর : $10 \leq x < 12$.

উদাহরণ 13. একজন ছাত্র 5 টাকা দরে x টি পেন্সিল এবং 8 টাকা দরে $(x + 4)$ টি খাতা কিনেছে। মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 97 টাকা হলে, সর্বাধিক কয়টি পেন্সিল কিনেছে?

সমাধান : x টি পেন্সিলের দাম $5x$ টাকা; $(x + 4)$ টি খাতার দাম $8(x + 4)$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $5x + 8(x + 4) \leq 97$

বা, $5x + 8x + 32 \leq 97$ বা, $13x \leq 97 - 32$

বা, $13x \leq 65$ বা, $x \leq \frac{65}{13}$ বা, $x \leq 5$

উত্তর : ছাত্রটি সর্বাধিক 5টি পেন্সিল কিনেছে।

প্রশ্নমালা 6.4

1 –5 পর্যন্ত সমস্যাগুলো অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

1. এক বালক ঘণ্টায় x কি. মি. বেগে 3 ঘণ্টা হাঁটল এবং ঘণ্টায় $(x + 2)$ কি. মি. বেগে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা দৌড়াল এবং তার অতিক্রান্ত পথ 29 কি. মি. এর কম।
2. একটি বোর্ডিং–এ রোজ $4x$ কেজি চাল এবং $(x - 3)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না।
3. 30 টাকা কেজি দরে সোহরাব সাহেব x কেজি আম কিনলেন। বিক্রেতাকে 500 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন।
4. একটি গাড়ি 4 ঘণ্টায় যায় x কি. মি. এবং 5 ঘণ্টায় যায় $(x + 120)$ কি. মি. । গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় 100 কি. মি. এর বেশি নয়।

5. এক টুকরা কাগজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ সে. মি.। তা থেকে x সে. মি. দীর্ঘ এবং 5 সে. মি. প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তাকার কাগজ কেটে নেওয়া হল।

6. পুত্রের বয়স মায়ের বয়সের এক–তৃতীয়াংশ। পিতা মায়ের চেয়ে 6 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর। পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

7. নাদিরা 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল। 17 বছর বয়সে সে এস. এস. সি. পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।

8. একখানি জেট প্লেনের গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার। প্লেনটি 15 কি. মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ কর।

9. ঢাকা থেকে জেদ্দার বিমান পথে দূরত্ব 5000 কি. মি.। জেট বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 900 কি.মি.; কিন্তু ঢাকা থেকে জেদ্দা যাবার পথে প্রতিকূল দিকে ঘণ্টায় 100 কি. মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হতে হয়। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

10. পূর্ববর্তী প্রশ্নের সূত্র ধরে, জেদ্দা থেকে ঢাকা ফেরার পথে উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

11. কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার 5 গুণ, সংখ্যাটির দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

দ্বিঘাত সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। লক্ষণীয় যে, সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরে নেওয়া হয়েছে। এর বামপক্ষ একটি দ্বিঘাত বহুপদী।

$f(x) = ax^2 + bx + c$ রাশিটিতে x এর স্থানে কোনো সংখ্যা α বসালে যদি $f(\alpha) = 0$ হয়, তবে α কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির সমাধান বা বীজ বলা হয়। যেমন $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের সমাধান বা বীজ 3, কেননা $3^2 - 7.3 + 12 = 0$. এ সমীকরণের আরেকটি সমাধান বা বীজ হচ্ছে 4, কেননা $4^2 - 7.4 + 12 = 0$ অতএব, $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের দুইটি সমাধান পাওয়া গেল।

$x^2 + 2x + 1 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একমাত্র সমাধান $x = -1$, কেননা বামপক্ষ $= (x + 1)^2$.
অন্যদিকে $x^2 + 2x + 2 = 0$ সমীকরণটির বাস্তব সংখ্যায় আদৌ কোনো সমাধান নেই। কেননা, $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ এবং বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা ≥ 0 বলে x এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $x^2 + 2x + 2$ এর মান শূন্য হতে পারে না। অতএব, কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রবিশেষে দুইটি বা একটি বীজ থাকতে পারে; আবার আদৌ কোনো সমাধান নাও থাকতে পারে। তবে এটা ঠিক যে, কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশি বীজ থাকতে পারে না। এখানে শুধু উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য সমীকরণের আলোচনা করা হবে যাদের সমাধান বাস্তব সংখ্যায় সম্ভব।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সমাধান পদ্ধতির মূলে রয়েছে বাস্তব সংখ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম : শূন্য নয়, এমন দুইটি সংখ্যার গুণফল শূন্য হতে পারে না। অন্য কথায়, দুইটি সংখ্যার গুণফল শূন্য হলে এদের মধ্যে অন্তত একটি সংখ্যা শূন্য। অন্য কথায়, a, b এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $ab = 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a = 0$ বা $b = 0$ হয় ।

উদাহরণ 14. সমাধান সেট নির্ণয় কর : $(x-3)(x+2)=0$

সমাধান: $(x-3)(x+2)=0$ হলে, $x-3=0$ অথবা, $x+2=0$ হবে।

সুতরাং $x=3$ অথবা, $x=-2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{3, -2\}$

উদাহরণ 15. সমাধান সেট নির্ণয় কর : $y^2=\sqrt{2}y$

সমাধান: দেওয়া আছে, $y^2=\sqrt{2}y$

বা, $y^2-\sqrt{2}y=0$ [ডানপক্ষ শূন্য করা হয়েছে]

বা, $y(y-\sqrt{2})=0$

বা, $y=0$ অথবা, $y-\sqrt{2}=0$

অর্থাৎ, $y=0$ অথবা, $y=\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{0, \sqrt{2}\}$

উদাহরণ 16. সমাধান সেট নির্ণয় কর : $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1.$

সমাধান : এখন, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+2-x+2}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}$

বা, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=\dfrac{4}{x+2}$ বা, $\dfrac{3(x-2)}{x-6}=\dfrac{2}{x+2}$

বা, $3(x-2)(x+2)=2(x-6)$ [আড়গুণন করে]

বা, $3(x^2-4)=2x-12$ বা, $3x^2-2x-12+12=0$

বা, $3x^2-2x=0$ বা, $x(3x-2)=0$

$\therefore x=0$ অথবা, $3x-2=0$ অর্থাৎ, $x=0$ অথবা, $x=\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{0, \dfrac{2}{3}\}$

প্রশ্নমালা 6.5

নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান সেট নির্ণয় কর :

1. $(x+1)(x+2)=0$
2. $(x+3)(x-\sqrt{5})=0$
3. $(\sqrt{2p}-3)(\sqrt{2p}+\sqrt{5})=0$
4. $2(z^2-9)+9z=0$
5. $v(v-10)=v-10$
6. $12(x^2+1)=25x$
7. $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{4}{5x-1}=2$
8. $\dfrac{x+7}{x+1}+\dfrac{2x+6}{2x+1}=5$
9. $\dfrac{3}{q}+\dfrac{4}{q+1}=2$
10. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$
11. $\dfrac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$
12. $(x+5)(x-5)=24$
13. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}+\dfrac{b}{x}$
14. $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}$

15. $\dfrac{1}{a+b+x} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{x}$

16. $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right) + 6 = 0$

17. $\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2} = 2$

18. $x + \dfrac{1}{x} = 2$

19. $x - 4 = \dfrac{x-4}{x}$

20. $2x^2 - 8ax = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

প্রদত্ত শর্ত থেকে কীভাবে দ্বিঘাত সমীকরণ তৈরি করে বিভিন্ন গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করতে পারা যায় নিচে তা দেখানো হল।

উদাহরণ 17. একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে সংখ্যাটি যোগ করলে তা পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয় গুণের সমান হয়। সংখ্যাটি কত?

সমাধান : মনে করি, সংখ্যাটি $= x$ $\therefore$ পরবর্তী সংখ্যাটি $= x + 1$
প্রশ্নমতে, $x^2 + x = 9(x+1)$ বা, $x^2 + x - 9x - 9 = 0$
বা, $x(x+1) - 9(x+1) = 0$ বা, $(x+1)(x-9) = 0$
সুতরাং $x + 1 = 0$ অথবা, $x - 9 = 0$
বা, $x = -1$ অথবা, $x = 9$
কিন্তু -1 স্বাভাবিক সংখ্যা নয়। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাটি হচ্ছে 9.

উদাহরণ 18. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 4 বেশি; ভগ্নাংশটি বর্গ করে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তার হর লব অপেক্ষা 40 বেশি। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ভগ্নাংশটির লব $= x$ $\therefore$ হর $= x + 4$.
$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \dfrac{x}{x+4}$ এবং ভগ্নাংশটির বর্গ $\dfrac{x^2}{(x+4)^2} = \dfrac{x^2}{x^2+8x+16}$
প্রশ্নমতে, $x^2 + 8x + 16 - x^2 = 40$ বা, $8x = 24$ বা, $x = 3$
$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি হচ্ছে, $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{3}{7}$.

উদাহরণ 19. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 15 সে. মি. এবং অপর দুইটি বাহুর অন্তর 3 সে. মি.। ঐ দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য $= x$ সে. মি. এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= (x + 3)$ সে. মি.
পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$
বা, $x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$ বা, $2x^2 + 6x - 216 = 0$
বা, $2(x^2 + 3x - 108) = 0$ বা, $x^2 + 3x - 108 = 0$
বা, $x(x+12) - 9(x+12) = 0$ বা, $(x+12)(x-9) = 0$
সুতরাং $x + 12 = 0$ অথবা, $x - 9 = 0$
$\therefore x = -12$ অথবা, $x = 9$
যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য $= 9$ সে. মি. এবং
অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= (9 + 3)$ সে. মি. $=12$ সে. মি.।

প্রশ্নমালা 6.6

1. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ অপেক্ষা দৈর্ঘ্য 4 মিটার বেশি; এর ক্ষেত্রফল 192 বর্গ মিটার হলে, পরিসীমা কত?

2. এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় কর, যা তার বর্গের চেয়ে 72 কম।

3. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 2 বেশি; ভগ্নাংশটি বর্গ করে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তার হর লব অপেক্ষা 48 বেশি। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

4. একটি আয়তাকার কক্ষের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। এর দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। কক্ষটির দৈর্ঘ্য কত?

5. একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গমিটার হলে, তার উচ্চতা কত?

6. 50 মিটার দীর্ঘ ও 40 মিটার প্রস্থ একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া?

7. শাহনেওয়াজ একটি রিকশা 6000 টাকায় ক্রয় করে $x\%$ লাভে ইউসুফের কাছে বিক্রি করল। ইউসুফ $x\%$ লাভে সেটি আবার সোহেলের কাছে বিক্রি করে দিল। সোহেলের ক্রয়মূল্য শাহনেওয়াজের ক্রয়মূল্য অপেক্ষা 2640 টাকা বেশি। x এর মান নির্ণয় কর।

8. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্ক সমষ্টি 12. সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের গুণফল 32. সংখ্যাটি কত?

9. এক ব্যক্তি 240 টাকায় কতকগুলো কলম কিনে দেখল যে যদি একটি কলম বেশি পেত তবে প্রত্যেকটি কলমের মূল্য গড়ে 1 টাকা কম পড়ত। সে কতগুলো কলম কিনেছিল?

10. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 64 মিটার এবং তার ক্ষেত্রফল 231 বর্গমিটার। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

11. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 13 সে. মি. এবং পরিসীমা 30 সে.মি.। ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত?

12. সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্রের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় x মিটার এবং $(x + 3)$ মিটার এবং ক্ষেত্রফল 170 বর্গমিটার। x এর মান কত?

13. কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে কোনো জ্যা–এর ওপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য অর্ধ–জ্যা অপেক্ষা 2 সে. মি. কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে. মি. হলে, ঐ জ্যা–এর দৈর্ঘ্য কত?

14. x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের সমষ্টি 1190. এর সাথে 88 নম্বর প্রাপ্ত একজন ছাত্রের নম্বর যোগ হওয়ায় ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 বেড়ে গেল। x এর মান কত?

15. একটি শ্রেণীতে যত জন ছাত্র–ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণীর ছাত্র–ছাত্রীর সংখ্যা কত?

দ্বিঘাত অসমতা

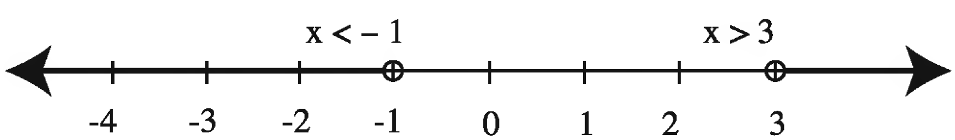
দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানে যেমন বাস্তব সংখ্যার ধর্ম, $ab = 0$ হলে, $a = 0$ অথবা $b = 0$ হবে মুখ্য ভূমিকা পালন করে, দ্বিঘাত অসমতা সমাধানে তেমনি ভূমিকা পালন করে নিম্নলিখিত ধর্ম, $ab > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি a, b উভয়ে ধনাত্মক অথবা উভয়ে ঋণাত্মক হয়। নিচের উদাহরণগুলো থেকে সমাধান প্রক্রিয়া স্পষ্ট হবে।

উদাহরণ 20. সমাধান করে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও :

$$(x+1)(x-3) > 0$$

সমাধান : এখানে x এর যেসব মানের জন্য অসমতাটি সত্য হয়, সেই সব মানই নির্ণেয়।
দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হবে, যদি এবং কেবল যদি উৎপাদক দুইটি উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।
সুতরাং $(x + 1)(x - 3) > 0$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $x + 1$ ও $x - 3$ উভয়ই ধনাত্মক নতুবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।
এখন, $x + 1 < 0$, যখন $x < -1$ এবং $x + 1 > 0$, যখন $x > -1$,
$x - 3 < 0$, যখন $x < 3$ এবং $x - 3 > 0$, যখন $x > 3$.
$\therefore$ শুধুমাত্র $x > 3$ হলে, $(x + 1)$ ও $(x - 3)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে এবং শুধুমাত্র $x < -1$ এর জন্যই $(x + 1)$ ও $(x - 3)$ উভয়েই ঋণাত্মক হবে।
অতএব, $(x + 1)(x - 3) > 0$ যদি এবং কেবল যদি $x < -1$ অথবা $x > 3$ হয়।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < -1$ অথবা $x > 3$.
সুতরাং, সমাধান সেট : $\{ x \in R : x < -1$ অথবা $x > 3 \}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :

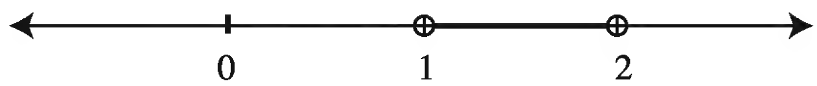


উদাহরণ 21. সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও :

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x^2 - 3x + 2 < 0$
এখন, $x^2 - 2x - x + 2$
$= x(x - 2) - 1(x - 2)$
$= (x - 2)(x - 1)$
সুতরাং, প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়, $(x - 2)(x - 1) < 0$.
এখন $(x - 2)(x - 1) < 0$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $(x - 2)$ ও $(x - 1)$ এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।
$x < 1$ হলে, $x - 1 < 0, x - 2 < 0$
$1 < x < 2$ হলে, $x - 1 > 0, x - 2 < 0$
$x > 2$ হলে, $x - 1 > 0, x - 2 > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $1 < x < 2$.
$\therefore$ সমাধান সেট : $\{x \in R : 1 < x < 2\}$.



প্রশ্নমালা 6.7

নিম্নলিখিত অসমতাগুলো সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

1. $(x-2)(x-3) > 0$
2. $(x-1)(x+2) \geq 0$
3. $(2x-1)(x+2) > 0$
4. $(x^2-2x+1) > 0$
5. $x^2-6x-7 > 0$
6. $x^2-2x-15 > 0$
7. $x^2-8x+15 > 0$
8. $x^2-9x+8 \leq 0$
9. $(5x-6)(x-3) < 0$
10. $2x^2-3x+1 < 0$

দ্বিঘাত অসমতার ব্যবহার

নিচে দ্বিঘাত অসমতা সম্পর্কিত কয়েকটি গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করা হল :

উদাহরণ 22. দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার পার্থক্য 2 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 14 অপেক্ষা বড়। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান কর। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কী কী হতে পারে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ছোট সংখ্যাটি $= x$
$\therefore$ বড় সংখ্যাটি $= x+2$
$\therefore x(x+2) > 14$ বা, $x^2+2x-14 > 0$
বা, $x^2+2x+1-15 > 0$ বা, $(x+1)^2 > 15$
বা, $x+1 > \sqrt{15}$ বা, $x > \sqrt{15}-1 \approx 2{\cdot}87$
$\therefore$ সর্বনিম্ন দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যা 3 এবং 5.

উদাহরণ 23. দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 89 থেকে বড়। সমস্যাটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান করে সংখ্যাদ্বয় নিম্নপক্ষে কত হতে পারে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ছোট সংখ্যাটি $= x$
$\therefore$ অপর সংখ্যাটি $= x+1$
প্রশ্নানুসারে, $x(x+1) > 89$
মনে করি, $x(x+1) = 90$ বা, $x^2+x-90 = 0$
বা, $(x+10)(x-9) = 0$
$\therefore x+10 = 0$ অথবা, $x-9 = 0$
অর্থাৎ, $x = -10$ অথবা, $x = 9$ -10 গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore x = 9$
এবং $x+1 = 9+1 = 10$
$\therefore$ সংখ্যাদ্বয় নিম্নপক্ষে 9 এবং 10.

প্রশ্নমালা 6.8

1. দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার পার্থক্য 9 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 9 অপেক্ষা বৃহত্তর। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান করে সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কী কী হতে পারে নির্ণয় কর।

2. দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল 358 থেকে বৃহত্তর। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান করে সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কী কী হতে পারে নির্ণয় কর।

3. দুইটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল 649 থেকে বড়। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান করে সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কী কী হতে পারে নির্ণয় কর।

4. দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর 5 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 12 অপেক্ষা বৃহত্তর। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং অসমতাটি সমাধান করে সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কী কী হতে পারে নির্ণয় কর।

5. 10 এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে 6 যোগ করলে যোগফল ঐ সংখ্যার 5 গুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। সংখ্যাগুলোর সম্ভাব্য সেট নির্ণয় কর।

প্রশ্ন

১। নিচের কোনটি অভেদ ?

ক. $4ab = (a + b)^2 + (a - b)^2$

খ. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

গ. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ঘ. $a^2 + 5a + 5 = 0$

২। $\frac{y}{p} + p = \frac{y}{q} + q$ হলে, y এর মান কত?

ক. pq খ. $p - q$

গ. $\frac{pq}{p-q}$ ঘ. $\frac{p+q}{pq}$

৩। $\frac{3-x}{3} - \frac{4-x}{4} + \frac{5-x}{5} = 1$ সমীকরণটির বীজ কত ?

ক. -17 খ. 1

গ. 0 ঘ. 17

৪। i. $2x + 3 = 9$

ii. $\frac{x}{2} - 2 = -1$

iii. $3x = 3$

ওপরের কোন সমীকরণগুলো সমতুল ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের সমীকরণের ভিত্তিতে (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\sqrt{3}x + 3 = 4$

৫। নিচের কোনটি x এর সঠিক মান ?

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. 1

গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. 3

৬। নিচের কোনটি প্রদত্ত সমীকরণের সমতুল ?

ক. $\sqrt{6}x + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{2}$ খ. $x + \sqrt{3} = 4$

গ. $\sqrt{6}x = -2$ ঘ. $3\sqrt{x} + 3 = 4$

৭। **সমীকরণের স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক ?**

ক. $\sqrt{3}x = 0$ খ. $\sqrt{3}x + 1 = 4$

গ. $\sqrt{3}x + 1 = 2$ ঘ. $\sqrt{3}x = 4$

৮। **একটি ভগ্নাংশের লব ও হরের সমষ্টি 5 এবং অন্তরফল 1. ভগ্নাংশটি কত ?**

ক. $\frac{3}{2}$ খ. $\frac{1}{4}$

গ. $\frac{2}{3}$ ঘ. $\frac{4}{5}$

৯। **দুইটি সংখ্যার পার্থক্য 4 ; ছোট সংখ্যাটির বর্গ বড়টির দ্বিগুণের সমান। বড়টির মান কত?**

ক. 2 খ. 4

গ. 6 ঘ. 8

১০। **শুভ্রির x টাকা আছে এবং পপির টাকা শুভ্রির টাকার $\frac{2}{3}$ গুণ। তাদের টাকার সমষ্টির তিনগুণ 18000 হলে, সম্ভাব্য সমীকরণ হবে –**

i. $x + \frac{2x}{3} = 18000$ ii. $x + \frac{2x}{3} = 6000$ iii. $3\left(x + \frac{2x}{3}\right) = 18000$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে সঠিক উত্তর কোনটি ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

ABC সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটি অপরটির দ্বিগুণ।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (১১-১৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

১১। **সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের পরিমাণের অনুপাত কত ?**

ক. 1 : 2 খ. 2 : 3

গ. 1 : 3 ঘ. 1 : 4

১২। **সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের পরিমাপের সমষ্টি 3x হলে, x এর মান নিচের কোনটি?**

ক. 90° খ. 60°

গ. 30° ঘ. 10°

১৩। **সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টির পূরক কোণ কত ?**

ক. 180° খ. 100°

গ. 90° ঘ. 0°

১৪। **$a < b$ এবং $c > 0$ হলে, নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?**

ক. $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ খ. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

গ. $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ ঘ. $\frac{a}{c} > -\frac{b}{c}$

১৫। $a < 0$ কথাটির অর্থ কী?

ক. a একটি ঋণাত্মক সংখ্যা

খ. a একটি বাস্তব সংখ্যা

গ. a একটি ধনাত্মক সংখ্যা

ঘ. a একটি পরমমান।

$5(3 - 2x) \leq 3(4 - 3x)$

ওপরের অসমতার ভিত্তিতে নিচের (১৬ – ১৮) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৬। অসমতাটির উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করলে অসমতাটি দাঁড়ায় -

ক. $\frac{1}{5}(3 - 2x) \leq (4 - 3x)$ খ. $\frac{1}{5}(3 - 2x) \leq \frac{1}{3}(4 - 3x)$

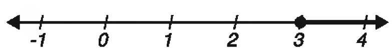
গ. $\frac{5}{3}(3 - 2x) \leq (4 - 3x)$ ঘ. $(3 - 2x) \leq (4 - 3x)$

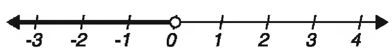
১৭। নিচের কোনটি অসমতাটির সমাধান ?

ক. $x > 3$ খ. $x \leq 3$

গ. $x \geq -3$ ঘ. $x \geq 3$

১৮। নিচের কোন সংখ্যা রেখা অসমতার সমাধানের চিত্ররূপ -

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

১৯। $ax^2 + bx + c = 0$ $[a \neq o]$ সমীকরণটির বীজ কয়টি ?

ক. 1 খ. 2

গ. 3 ঘ. 4

২০। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 একক এবং ভূমি 3 একক। এর উচ্চতা কত একক ?

ক. 16 খ. 9

গ. 4 ঘ. 2

২১। **একটি সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 2। সম্ভাব্য সমীকরণটি হবে –**

(i) $x + \frac{1}{x} = 2$ (ii) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (iii) $x^2 - 2x + 1 = 0$

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন উত্তরটি সঠিক ?

ক. i ও iii খ. ii ও iii

গ. i ও ii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্য থেকে (২২ – ২৪) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিন গুণ।

২২। **দশক স্থানীয় অঙ্ক x হলে, একক স্থানীয় অঙ্ক কত ?**

ক. $3x$ খ. $\frac{3}{x}$

গ. $(x+3)$ ঘ. $\frac{x}{3}$

২৩। **একক স্থানীয় অঙ্ক 3 হলে, সংখ্যাটি কত ?**

ক. 13 খ. 31

গ. 39 ঘ. 93

২৪। **দশক স্থানীয় অঙ্ক 2 হলে, স্থান বিনিময় করে সংখ্যাটি হবে-**

ক. 62 খ. 26

গ. 21 ঘ. 12

২৫। **তোমার ভাইয়ের কাছে তোমার চেয়ে 1 টাকা বেশি ও বোনের কাছে 3 টাকা কম আছে। তোমার x টাকা থাকলে তোমার ভাই বোনের টাকার গুণফলকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করলে হবে-**

ক. $x(x-1)(x+3) > 0$ খ. $x(x-1)(x+3) < 0$

গ. $(x-1)(x+3) > 0$ ঘ. $(x-1)(x-3) < 0$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (২৬ – ২৮) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের পার্থক্য 2 একক এবং প্রস্থ x একক। ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক অপেক্ষা বড়।

২৬। **সমস্যাটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করলে হবে-**

ক. $x(x+2) + 8 > 0$ খ. $x(x+2) > 8$

গ. $x(x+2) - 8 \geq 0$ ঘ. $8 > x(x+2)$

২৭। **দৈর্ঘ্য প্রস্থের কত গুণ ?**

ক. দ্বিগুণ খ. অর্ধেক

গ. এক চতুর্থাংশ ঘ. দুই-তৃতীয়াংশ

২৮। **দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সম্ভাব্য সেট-**

ক. {3, 2} খ. {2, 3}

গ. {4, 2} ঘ. {2, 4}

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।

ক. এক চলক ব্যবহার করে ঐ সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।

খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গ. সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে, তবে ঐ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ? অতঃপর ঐ কর্ণের দৈর্ঘ্যকে একটি বর্গের বাহু ধরলে, ঐ বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। প্রবাহ বিদ্যানিকেতন স্কুলে বর্তমানে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 792 জন। ঐ স্কুলের ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যা অপেক্ষা 58 বেশি। দুই বৎসর পূর্বে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ছিল বর্তমানের তিন চতুর্থাংশ অপেক্ষা 98 বেশি।

ক. উক্ত স্কুলে বর্তমান ছাত্রী সংখ্যা কত ?

খ. দুই বৎসর পূর্বে ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

গ. ঐ স্কুলের ছাত্র সংখ্যা ও ছাত্রী সংখ্যার বিয়োগফলের বর্গ ছাত্রী সংখ্যার চতুর্থাংশ থেকে 34 কম হলে, ঐ স্কুলের ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যা কত ?

৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x-1)$ সে.মি. এবং x সে.মি.। আবার একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজের উচ্চতার সমান। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে $(x+13)$ সে.মি. ও $(x+3)$ সে.মি.। $x = 5$ একক।

ক. ক্ষেত্র তিনটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত বের কর।

খ. আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সাংখ্যিক মান বর্গের ক্ষেত্রফলের 10 গুণের সমান হলে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ থেকে 2 সে.মি. কম হলে, বর্গের ক্ষেত্রফল কত হবে তা নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

অন্বয়, ফাংশন ও লেখচিত্র

অন্বয়

যদি A ও B দুইটি সেট হয়, তাহলে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর যেকোনো অশূন্য উপসেট R কে A থেকে B এর একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়।
যখন x, A সেটের একটি উপাদান হয় এবং y, B সেটের একটি উপাদান হয় এবং $(x, y) \in R$ হয়, তাহলে লেখা হয় $x R y$ এবং পড়া হয় "x is related to y" অর্থাৎ উপাদান x, উপাদান y এর সঙ্গে R সম্পর্কযুক্ত।

A থেকে A তে একটি সম্পর্ক R অর্থাৎ $R \subset A \times A$ হলে R কে A এর উপর অন্বয় বলা হয়।
কার্যক্ষেত্রে, সাধারণত দুইটি সেট A ও B এবং উপাদানগুলোর মধ্যে একটি সম্পর্ক দেওয়া থাকে; তখন যেসকল ক্রমজোড় (x, y) ঐ সম্পর্কযুক্ত উপাদান $x \in A$, $y \in B$ নিয়ে পাওয়া যায়, তাদের সেটই হচ্ছে প্রদত্ত সম্পর্কের সংশ্লিষ্ট অন্বয়।

উদাহরণ 1. যদি $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ এবং A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্ক বিবেচনায় আনা হয়, তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয়টি কী?

সমাধান : প্রশ্নমতে, অন্বয়টি $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x > y\}$.
এখানে, $A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 3\}$
$= \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$
$\therefore$ প্রদত্ত সম্পর্ক অনুসারে, $R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

উদাহরণ 2. যদি $C = \{1, 4\}$, $D = \{3, 5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x < y$ সম্পর্ক বিবেচনায় আনা হয়, তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয়টি কী?

সমাধান : এখানে, $R = \{(x, y) : x \in C, y \in D$ এবং $x < y\}$.
$C \times D = \{1, 4\} \times \{3, 5\}$
$= \{(1, 3), (1, 5), (4, 3), (4, 5)\}$
$\therefore R = \{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}$.

প্রশ্নমালা 7.1

১. যদি $A = \{5, 6\}$, $B = \{4, 5\}$ এবং A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে, তবে অন্বয়টি বর্ণনা কর।
২. যদি $C = \{3, 4\}$, $D = \{2, 5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x < y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় আনা হয়, তবে অন্বয়টি বর্ণনা কর।

ফাংশন

যদি $y = x^2 - 4x + 3$ হয়, তাহলে y, x এর একটি ফাংশন। কারণ, x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে। এস্থলে চলরাশি y এর মান চলরাশি x এর মানের ওপর নির্ভরশীল। সাধারণভাবে বলা যায় :

যদি দুইটি চলক x ও y এর মধ্যে এরূপ সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে যে x এর মানের জন্য y এর একটি ও কেবল মাত্র একটি মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়।

আবার, r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি $C = 2\pi r$. এখানে C, r এর ফাংশন এবং π একটি ধ্রুবক। যদি r এর মানকে বাড়ানো বা কমানো হয়, তাহলে C এর মান বাড়বে বা কমবে। অর্থাৎ C এর হ্রাস–বৃদ্ধি r এর হ্রাস–বৃদ্ধির ওপর নির্ভরশীল।

সেটের মাধ্যমে ফাংশনের ব্যাখ্যা : মনে করি, X ও Y দুইটি অশূন্য সেট। যদি এমন একটি নিয়ম (Rule) বা সূত্র (Formula) f দেওয়া থাকে যে X এর যেকোনো উপাদান x এর জন্য Y সেটে একটি এবং কেবল মাত্র একটি উপাদান y পাওয়া যায়, তবে f কে X থেকে Y এ বর্ণিত একটি ফাংশন বলা হয়। তখন আমরা লিখি, $y = f(x)$.

উদাহরণ 3. মনে করি, $P = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $Q = \{90, 80, 95, 60\}$.
যদি P ও Q যথাক্রমে কোনো শ্রেণীর চারজন ছাত্রের রোল নম্বরের সেট এবং চারজন ছাত্রের গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের সেট হয় এবং P ও Q এর উপাদানগুলোকে ছকের মাধ্যমে সমন্বিত করা হয়, তাহলে ছকটি হবে নিম্নরূপ :

রোল নম্বর	প্রাপ্ত নম্বর
1	90
2	80
3	95
4	60

ওপরের ছকটি P থেকে Q এ একটি ফাংশন f নির্দেশ করছে। এখানে, $f(1) = 90$, $f(2) = 80$, $f(3) = 95$, $f(4) = 60$.

ফাংশনের প্রতীক : সাধারণত $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$ ইত্যাদি প্রতীকের মাধ্যমে ফাংশন নির্দেশ করা হয়ে থাকে।

ফাংশনের মান : যদি $f(x)$ একটি প্রদত্ত ফাংশন হয়, তবে $f(\alpha)$ দ্বারা ঐ ফাংশনের মান বোঝায়, যখন x এর স্থানে α বসনো হয়। যেমন, $f(x) = x^3 - 8x + 9$ হলে,
$f(2) = 2^3 - (8 \times 2) + 9 = 8 - 16 + 9 = 17 - 16 = 1$.

ফাংশনের ধারণায় বলা হয়েছে, প্রত্যেক $x \in X$ এর সংশ্লিষ্ট একটি ও একটিমাত্র উপাদান $y \in Y$ এ থাকবে। কিন্তু X এর একাধিক উপাদানের সংশ্লিষ্ট Y এর উপাদান অভিন্ন হতে পারে, যেমন $f(x) = x^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য $f(x)$ এবং $f(-x)$ অভিন্ন। আবার, এমনও হতে পারে যে, X এর দুইটি বিভিন্ন উপাদানের সংশ্লিষ্ট Y এর উপাদান সর্বদা বিভিন্ন, যেমন উদাহরণ 3 এর ফাংশন। এরূপ ফাংশনকে এক –এক ফাংশন বলে।

উদাহরণ 4. $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\because f(x) = x^4 + 5x - 3$
$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 5 \times (-1) - 3 = 1 - 5 - 3 = 1 - 8 = -7$

উদাহরণ 5. $f(x) = 2x - 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

সমাধান : $f(x) = 0$
বা, $2x - 6 = 0$ বা, $2x = 6$ $\therefore x = 3$.
উত্তর : $x = 3$ হলে, $f(x) = 0$ হবে।

প্রশ্নমালা 7.2

1. $f(x) = x^3 - 2x + 6$ হলে, $f(2)$, $f(-3)$ ও $f\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?
3. যদি $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 8$ হয়, তাহলে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

4. যদি $g(x) = \dfrac{3x+4}{x-5}$ হয়, তাহলে $g(6)$ এর মান কত?

5. যদি $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x-1}$ হয়, তাহলে $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$ এর মান কত হবে?

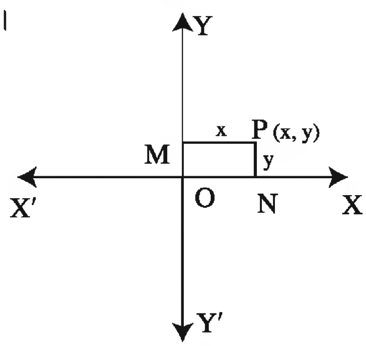
6. $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

লেখচিত্র

বীজগণিতীয় সমীকরণে উপস্থাপিত চলক সম্পর্কিত চিত্ররূপ হল লেখচিত্র। লেখচিত্র যেহেতু সমীকরণের চিত্ররূপ, সেহেতু সমীকরণের ধারণা সুস্পষ্ট করার ক্ষেত্রে লেখচিত্রের গুরুত্ব অপরিসীম। অধিকন্তু লেখচিত্রের মাধ্যমে বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপিত হয়।

ফরাসি দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes : 1596 – 1650) সর্বপ্রথম বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে মৌলিক সম্পর্ক স্থাপনে অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন। তিনি কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি সরলরেখার সাহায্যে বিন্দুর অবস্থান সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয়ের মাধ্যমে সমতলীয় জ্যামিতিতে আধুনিক ধারার প্রবর্তন করেন। তিনি পরস্পর লম্বভাবে ছেদী সরলরেখা দুইটিকে অক্ষরেখা হিসেবে আখ্যায়িত করেন এবং অক্ষরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুকে মূলবিন্দু বলেন।

সমকোণীয় অক্ষ ও স্থানাঙ্ক : কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি সরলরেখা XOX' ও YOY' আঁকা হল। অনুভূমিক রেখা XOX' কে x অক্ষ এবং উল্লম্ব রেখা YOY' কে y অক্ষ বলা হয়। অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে বলা হয় মূলবিন্দু। দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব জ্ঞাপক চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়। সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু P থেকে y অক্ষের সদিক লম্ব দূরত্ব PM কে বিন্দুটির x স্থানাঙ্ক বা ভুজ এবং x অক্ষের সদিক লম্ব দূরত্ব PN কে বিন্দুটির y স্থানাঙ্ক বা কোটি বলা হয়। বস্তুত স্থানাঙ্ক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সমতলে অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর সঠিক অবস্থান জানা যায়। P বিন্দুকে সংক্ষেপে (x, y) বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হয়। উল্লেখিত স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়।



লক্ষ করি : (i) মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0,0)

(ii) y অক্ষ থেকে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব = $|x_1|$

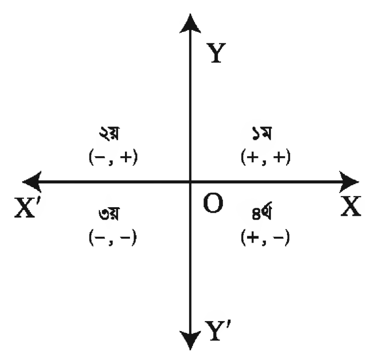
(iii) x অক্ষ থেকে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব = $|y_1|$

(vi) x অক্ষের ওপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শূন্য।

(iv) y অক্ষের ওপর প্রতিটি বিন্দুর ভুজ শূন্য।

স্থানাঙ্কের চিহ্নবিধি :

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় সম্পূর্ণ সমতলটিকে XOY, YOX', $X'OY'$ এবং $Y'OX$ এই চারটি অংশে বিভক্ত করে। এগুলোকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ (quadrant) বলা হয়। y অক্ষের ডানপাশে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক, বামপাশে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক। আবার, x অক্ষের ওপরের দিকে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নিচের দিকে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক। বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য চিহ্ন সংক্রান্ত নিয়ম হিসেবে পাই,



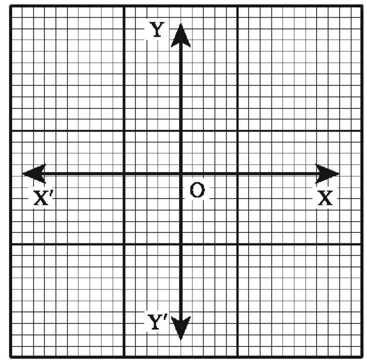
(i) প্রথম চতুর্ভাগে x ও y উভয়ই ধনাত্মক।

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে x ঋণাত্মক, y ধনাত্মক।

(i) তৃতীয় চতুর্ভাগে x ও y উভয়ই ঋণাত্মক।

(i) চতুর্থ চতুর্ভাগে x ধনাত্মক, y ঋণাত্মক ।

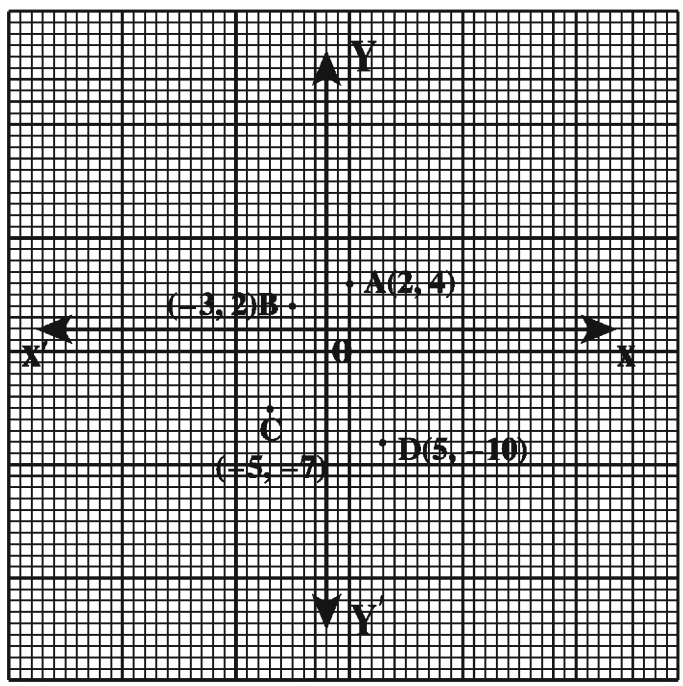
ছক কাগজ : লেখচিত্র হল সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশিত চলকের মধ্যেকার সম্পর্কের চিত্ররূপ এবং এই লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ছক কাগজের প্রয়োজন। কোনো সমতলে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য এক ধরনের চৌকো ঘর কাটা কাগজ ব্যবহৃত হয়ে থাকে। সমদূরত্বে কতকগুলো অনুভূমিক এবং কতকগুলো উল্লম্ব রেখা এঁকে কাগজটিকে ছোট ছোট বর্গে ভাগ করা হয়। এ ধরনের বর্গাঙ্কিত কাগজকে ছক কাগজ বা Graph Paper বলে। ছক কাগজের এক বা একাধিক ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা যেতে পারে।



ছক কাগজে বিন্দু পাতন : ছক কাগজে একটি অনুভূমিক রেখা ও একটি উল্লম্ব রেখাকে যথাক্রমে XOX′ ও YOY′ নামকরণ করে x অক্ষ ও y অক্ষ টানা হয়। এরপর ক্ষুদ্রতম বর্গের কয়টি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হবে তা প্রয়োজন ও সুবিধা অনুযায়ী স্থির করে নিতে হয়। তারপর এককের ওপর নির্ভর করে এবং ভুজ ও কোটির চিহ্ন সাপেক্ষে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়। নিচের উদাহরণ থেকে প্রক্রিয়াটি পরিষ্কারভাবে বোঝা যায়।

উদাহরণ 6. A (2, 4), B (–3, 2), C (–5, –7), D (5, –10) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন কর।

ছক কাগজের মাঝামাঝি XOX′ ও YOY′ অক্ষ দুইটি টেনে নেওয়া হল এবং ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হল। A(2, 4) বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক, তাই A বিন্দু প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। মূলবিন্দু O থেকে OX বরাবর 2 একক যেতে হবে, তারপর সেখান থেকে OY এর সমান্তরালভাবে 4 একক গেলেই বিন্দুটি পাওয়া যাবে। বিন্দুটি চিহ্নিত করে তার পাশে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (2, 4) লিখতে হবে। B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 2), এই বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক। B বিন্দু দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। মূলবিন্দু থেকে OX′ বরাবর 3 একক গিয়ে সেখান থেকে OY এর সমান্তরাল দিকে 2 একক গেলেই বিন্দুটির অবস্থান পাওয়া যাবে।



ঐ বিন্দুটি পেনসিল দ্বারা চিহ্নিত করে তার পাশে স্থানাঙ্ক (–3, 2) লিখতে হবে। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–5, –7), এখানে ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক। বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। মূলবিন্দু থেকে OX′ বরাবর 5 একক গিয়ে সেখান থেকে OY′ এর দিকে 7 একক গেলে বিন্দুটি পাওয়া যাবে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, –10), এই বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক। D বিন্দু চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। মূলবিন্দু থেকে OX বরাবর 5 একক গিয়ে সেখান থেকে OY′ এর দিকে 10 একক গেলে বিন্দুটি পাওয়া যাবে।

দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় : মনে করি, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। P এবং Q থেকে OX এর ওপর PN এবং QM লম্ব আঁকা হল। আবার Q থেকে PN এর ওপর QK লম্ব আঁকা হল এবং P, Q যোগ করা হল।

এখন PQK সমকোণী ত্রিভুজে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$PQ^2 = QK^2 + PK^2$

বা, $PQ^2 = (ON - OM)^2 + (PN - KN)^2$

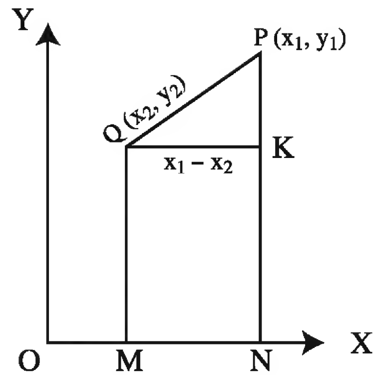
বা, $PQ^2 = (ON - OM)^2 - (PN - QM)^2$

বা, $PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

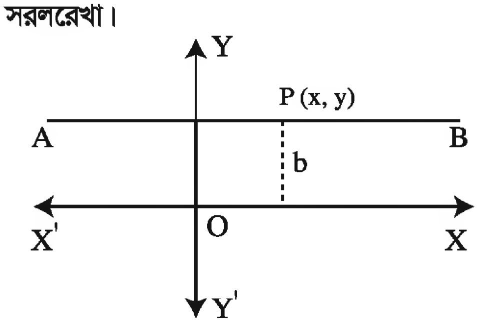
অর্থাৎ, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির মধ্যে সরল রৈখিক দূরত্ব, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



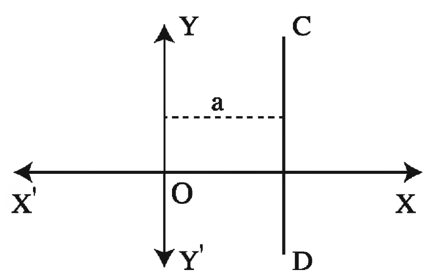
বি: দ্র : P, Q বিন্দুর অবস্থান নির্বিশেষে এই সূত্র প্রযোজ্য। দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়ে ধনাত্মক বর্গমূলই ধর্তব্য। লক্ষণীয় যে, মূলবিন্দু O হতে যেকোনো বিন্দু P(x, y) এর দূরত্ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ : x অক্ষ থেকে সমান লম্ব–দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা হবে। অন্য কথায় বলা যায়, X অক্ষ থেকে যে সকল বিন্দুর লম্ব দূরত্ব একটি নির্দিষ্ট (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা বা শূন্য) তাদের সেট একটি সরলরেখা।

মনে করি, AB এমন একটি সরলরেখা যার প্রতিটি বিন্দু x অক্ষ থেকে b একক লম্ব–দূরত্বে অবস্থান করে। সুতরাং উক্ত রেখার ওপরই প্রতিটি বিন্দু P(x, y), y = b শর্তটি মেনে চলে। সুতরাং x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, y = b, b এর ঋণাত্মক মানের জন্য x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা x অক্ষের b একক নিচে অবস্থান করবে। যখন b = 0 হয়, তখন AB সরলরেখাটি x অক্ষের ওপর সমাপতিত হবে, অতএব x অক্ষের সমীকরণ y = 0.



অনুরূপভাবে, y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, x = a, বিশেষত, y অক্ষের সমীকরণ x = 0 যেমন, x = –5 সমীকরণটি y অক্ষের সমান্তরাল এবং y অক্ষের বাম পাশে 5 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে এবং y = 6 সমীকরণটি x অক্ষের সমান্তরাল এবং x অক্ষের ওপর দিকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।



সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ : দুই চলক x ও y সম্বলিত একঘাত বিশিষ্ট যেকোনো সমীকরণ ax + by + c = 0 সর্বদা একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। ax + by + c = 0 কে সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ বলা হয়। এই ধরনের সমীকরণ যে সরলরেখা নির্দেশ করে, লেখচিত্রের সাহায্যে তা দেখানো হয়েছে।

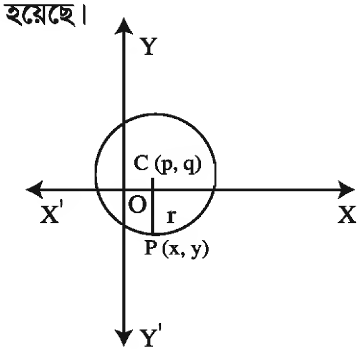
কেন্দ্র (p, q) ও ব্যাসার্ধ r বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ :

মনে করি, C (p, q) বৃত্তের কেন্দ্র, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং P (x, y) বৃত্তটির যেকোনো বিন্দু। তাহলে, CP = r

$\therefore \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} = r$

বা, $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

সমীকরণটি পরিধির ওপর P(x, y) বিন্দুর যেকোনো অবস্থানের জন্য খাটে। সুতরাং এটিই বৃত্তটির সমীকরণ।



অনুসিদ্ধান্ত : কেন্দ্র মূলবিন্দু $(0, 0)$ হলে, বৃত্তটির সমীকরণ হবে, $x^2 + y^2 = r^2$

উদাহরণ 7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$ কে $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ আকারে প্রকাশ কর এবং এর লেখচিত্রের প্রকৃতি উল্লেখ কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$
বা, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 9 - 16 - 39 = 0$
বা, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 64 = 0$
বা, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$
বা, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8^2$

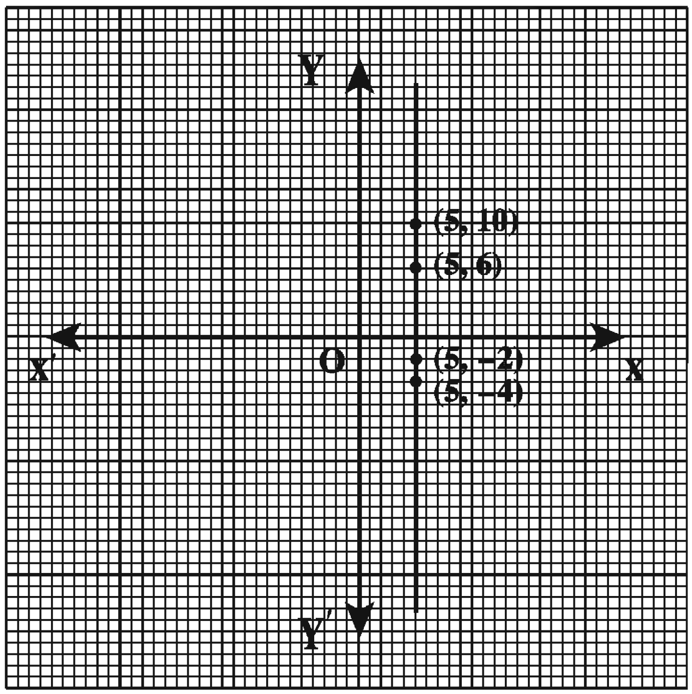
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ 8 একক।

সরল সমীকরণের লেখচিত্র :

উদাহরণ 8. $x = 5$ সমীকরণটির লেখ আঁক।

সমাধান : $x = 5$ সমীকরণটিকে লেখা যায়,
$x + 0.\, y = 5$
এখানে লক্ষণীয় যে, y এর যেকোনো মানই নেওয়া হোক না কেন x এর মান সর্বদা 5 হবে। তাই সমীকরণকে সিদ্ধ করে এমন x, y এর মান আমরা এভাবে নিতে পারি,

x	5	5	5	5
y	–2	6	10	– 4



ছক কাগজে $(5, -2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$, $(5, -4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এবং সেই বিন্দুগুলো যুক্ত করে লেখচিত্র পাওয়া যাবে। এখানে লেখচিত্রটি y অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু থেকে x অক্ষের ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরে অবস্থিত। সুতরাং, মূলবিন্দুর ডানে মূলবিন্দু থেকে 5 একক দূরে YOY' এর সমান্তরাল সরলরেখাই নির্ণেয় লেখ।

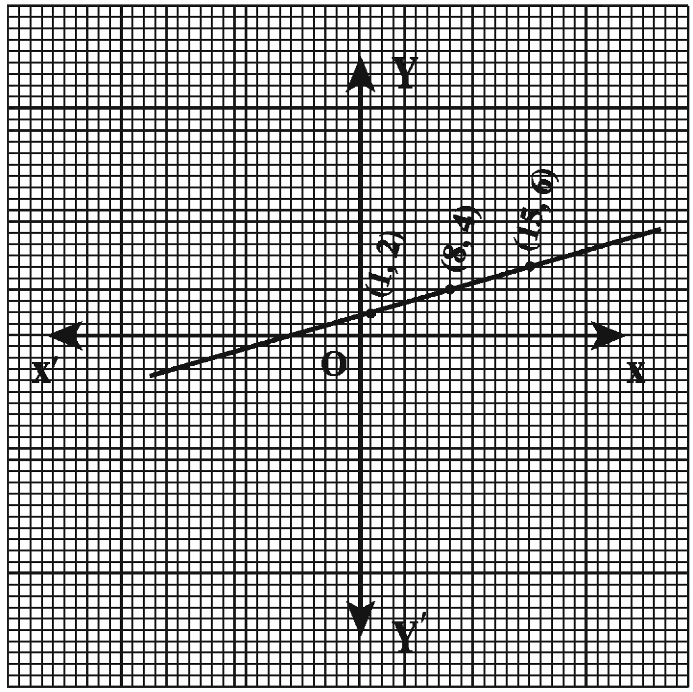
উদাহরণ 9. $2x - 7y + 12 = 0$ সমীকরণের লেখ অঙ্কন কর।

সমাধান : $2x - 7y + 12 = 0$
বা, $-7y = -2x - 12$ বা, $7y = 2x + 12$
$\therefore y = \dfrac{2x + 12}{7}$
এ সম্পর্ক থেকে আমরা লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	1	8	15
y	2	4	6

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1, 2), (8, 4), (15, 6) বিন্দুগুলো ছক কাগজে সংস্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলোকে যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করি। ফলে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হল। এই সরলরেখাই $2x - 7y + 12 = 0$ সমীকরণের লেখ।

বিঃ দ্রঃ $ax + by + c = 0$ আকারের যেকোনো সমীকরণের লেখ সরলরেখা বিধায় লেখ আঁকার জন্য দুইটি বিন্দু সংস্থাপনই যথেষ্ট, কিন্তু কার্যক্ষেত্রে অন্তত তিনটি বিন্দু সংস্থাপন করা বাঞ্ছনীয় (যাতে গণনায় বা বিন্দু পাতনে ভুল হলে ধরা পড়ার সম্ভাবনা থাকে)।



দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র

উদাহরণ 10. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 103 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র ছক কাগজে দেখাও।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 103 = 0$$

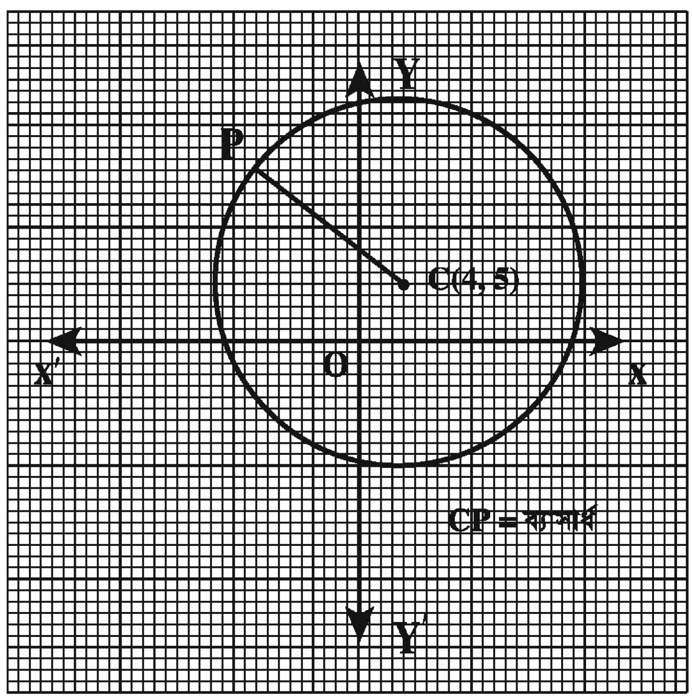
বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 - 16 - 25 - 103 = 0$

বা, $(x-4)^2 + (y-5)^2 - 144 = 0$

বা, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 144$

$\therefore\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 12^2$

প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 5) এবং ব্যাসার্ধ 12 একক। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (4, 5) বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি। মনে করি, বিন্দুটি C. এখন C বিন্দুকে কেন্দ্র করে 12 একক পরিমাণ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। অঙ্কিত বৃত্তই প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র।



প্রশ্নমালা 7.3

1. ছক কাগজে $(3, 1), (0, -5), (-3, 4), (7, -9)$ বিন্দুগুলো সংস্থাপন কর।
2. ছক কাগজে $(1, 2), (-1, 1), (11, 7)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।
3. $(4, -7)$ এবং $(-1, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব নির্ণয় কর।
4. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র $(-4, -3)$ এবং ব্যাস 10.
5. নিচের সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর :

   (i) $y = 7$ (ii) $x = -10$ (iii) $x = 3 - 4y$

   (iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (v) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ (vi) $4x + 3y = 12$

   (vii) $x - y = 10$ (viii) $7x - 3y = 21$ (ix) $2y - 2x = 7$

   (x) $y = \frac{1}{2}x + 5$ (xi) $2x - 9y - 5 = 0$ (xii) $3x - 5y - 16 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 64 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র ছক কাগজে দেখাও।
7. $(x-3)^2 + (y+5)^2 - 81 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
8. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
9. $4x + 5y = 20$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। অক্ষদ্বয় দ্বারা ঐ লেখচিত্রের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ভেদ (Variation)

সরল ভেদ (Direct Variation) : যদি দুইটি চলক (Variable) এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত থাকে যে, একটি চলকের হ্রাসে বা বৃদ্ধিতে অপর চলকটির সব সময় একই অনুপাতে হ্রাস বা বৃদ্ধি ঘটে তাহলে বলা হয় যে, একটি চলক অপর চলকের সঙ্গে সরাসরি পরিবর্তিত বা একটি চলককে অপরটির সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত বলা হয়। এই নির্দিষ্ট অনুপাতকে ভেদের ধারক বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, কোনো ত্রিভুজের উচ্চতা ধ্রুব হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ভূমির সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত হবে। কারণ ভূমির বৃদ্ধি বা হ্রাস ঘটলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলেরও একই অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাস ঘটবে।
x, y এর সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত বোঝাতে লেখা হয়, $x \propto y$ এবং পড়া হয়, x varies as y.

দ্রষ্টব্য : যদি $A \propto B$ হয়, তবে $A = kB$, যেখানে K একটি ধ্রুবক। বিপরীতক্রমে, যদি $A = kB$ হয়, যেখানে k একটি ধ্রুবক, তবে $A \propto B$ হয়।

ভেদের ধ্রুবক নির্ণয়ের পদ্ধতি

উদাহরণ 11. যদি $A \propto B$ হয় এবং $A = 20$ যখন $B = 5$, তখন ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় কর।

সমাধান : যেহেতু, $A \propto B \therefore A = kB.$

$\therefore 20 = k \times 5$ বা, $k = \frac{20}{5} \therefore k = 4$

ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation) : যখন দুইটি চলরাশি এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত থাকে যে, একটির বৃদ্ধিতে অপরটি সর্বদা একই অনুপাতে কমে যায় বা প্রথমটির হ্রাসে দ্বিতীয়টি সেই একই অনুপাতে বেড়ে যায়, তাহলে একটি অপরটির সাথে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত বলা হয়।
এরূপে y চলকটি x চলকের সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হবে, যদি y, $\frac{1}{x}$ এর সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত হয়।
অর্থাৎ, যদি $y = k.\frac{1}{x}$ হয়, যেখানে k একটি ধ্রুবক। সুতরাং x এবং y ব্যস্ত ভেদে অন্বিত যদি এবং কেবল যদি $xy =$ ধ্রুবক হয়।
একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট যেকোনো আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ ও দৈর্ঘ্য ব্যস্ত ভেদে অন্বিত।

উদাহরণ 12. $y \propto x$ এবং $y = 5$ যখন $x = 15$; x ও y এর মধ্যে অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : $y \propto x$ [দেওয়া আছে]
$\therefore\ y = kx$; যেখানে k একটি ধ্রুবক। .... (i)
এখানে, $5 = 15k$ [x ও y এর প্রদত্ত মান বসিয়ে]
$\therefore\ k = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
এখন সমীকরণ (i) এ $k = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই, $y = \frac{1}{3}x \quad \therefore\ x = 3y$

উদাহরণ 13. $x \propto y$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 - y^2 \propto xy$

সমাধান : $x \propto y$ [দেওয়া আছে]
$\therefore\ x = ky$ [যেখানে k একটি ধ্রুবক] ....(i)
(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে পাই, $x^2 = kxy$ .... (ii)
আবার, (i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\frac{y}{k}$ দ্বারা গুণ করে পাই, $y^2 = \frac{xy}{k}$ ..... (iii)
এখন (ii) নং সমীকরণ থেকে (iii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,
$x^2 - y^2 = xy\left(K - \frac{1}{k}\right)$; এখানে $k - \frac{1}{k}$ একটি ধ্রুবক।
$\therefore\ x^2 - y^2 \propto xy$

উদাহরণ 14. r_1 ও r_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি নিরেট স্বর্ণগোলক গলিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। নবনির্মিত গোলকের ব্যাসার্ধ কত? জানা আছে যে, গোলকের ঘনফল এর ব্যাসার্ধের ঘনের সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত।

সমাধান : মনে করি, v_1 ও v_2 গোলকদ্বয়ের ঘনফল। যেহেতু গোলকের ঘনফল এর ব্যাসার্ধের ঘনের সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত, সেহেতু $v_1 = kr_1^3$ এবং $v_2 = kr_2^3$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।
মনে করি, নবনির্মিত গোলকের ব্যাসার্ধ r, যার ঘনফল হল, $v_1 + v_2$.
$\therefore\ v_1 + v_2 = kr^3$
বা, $kr_1^3 + kr_2^3 = kr^3$ [v_1 ও v_2 এর মান বসিয়ে]
বা, $r^3 = r_1^3 + r_2^3$
$\therefore\ r = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}$

প্রশ্নমালা 7.4

1. $y \propto x$ এবং $y = 10$ যখন $x = 25$; যখন $x = 35$, তখন y এর মান নির্ণয় কর।
2. x এর বর্গ, y এর ঘন এর সঙ্গে সরল ভেদে অন্বিত হয় এবং $x = 2$, যখন $y = 3$; x ও y এর সম্পর্ক একটি সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ কর।
3. $a + b \propto a - b$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + b^2 \propto ab$.
4. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + z^2 \propto yz + zx + xy$.
5. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হলে, দেখাও যে, $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \propto c^3$.
6. $r + s \propto t + \frac{1}{t}$ এবং $r - s \propto t - \frac{1}{t}$ হলে, r ও t এর সম্পর্ক একটি সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ কর, যেখানে দেওয়া আছে যে, $r = 3, s = 1$, যখন $t = 2$.
7. দেওয়া আছে যে, কোনো বিন্দুতে আলোর প্রাখর্য আলোর উৎস থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বের বর্গের সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত। একটি বই 6 মিটার দূরে অবস্থিত একটি টেবিল ল্যাম্প থেকে যে আলো পায় তার অর্ধেক আলো পেতে বইটিকে টেবিল ল্যাম্প থেকে কত দূরে সরিয়ে নিতে হবে?
8. স্থির অবস্থান থেকে পড়ন্ত বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বস্তুর পতনকালের বর্গের সরল ভেদে অন্বিত। যদি 5 সেকেন্ডে একটি বস্তু 122·5 মিটার পতিত হয়, তাহলে ষষ্ঠ সেকেন্ডে বস্তুটি আর কতদূর পড়বে?

প্রশ্ন

১। **সেট A হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে, নিচের কোনটি সঠিক ?**

ক. $R \subset A \times B$ খ. $R \subset A$

গ. $R \subset B$ ঘ. $(A \times B) \subset R$

২। i. $f(x) = 2x - 6$ হলে, $f(3) = 0$

ii. $x \propto y,\ y \propto z$ হলে, $x \propto z$

iii. $y = x^3 - 3x + 6$ হলে, x কে y এর ফাংশন বলা হয়।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন উত্তরটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

$f(x) = x^2 + x - 12$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৩ – ৫) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩। **f(3) এর সঠিক মান নিচের কোনটি ?**

ক. – 3 খ. 0

গ. 4 ঘ. 12

৪। **x এর কোন মানের জন্য f(x) = 0 হবে ?**

ক. 3, – 4 খ. – 3, 4

গ. 3, –12 ঘ. – 4, 12

৫। **নিচের কোনটি ফাংশন f এর উপসেট ?**

ক. {(0, -12), (3, 0), (- 4, 0)} খ. {(- 3, 0), (4, 0), (5, 12)}

গ. {(- 4, 0), (4, 0), (5, 12)} ঘ. {(0, -12), (- 4, 0), (- 3, 5)}

৬। i. **যদি $A = \pi r^2$ হয়, তখন A, r এর একটি ফাংশন।**

ii. সকল ফাংশন অন্বয়

iii. $x_1 \propto y_1$ এবং $x_2 \propto y_2$ হলে, $x_1y_1 \propto x_2y_2$

ওপরের বাক্যগুলোর প্রেক্ষিতে কোন উত্তরটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

$f(x) = x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75$

ক. f(x) = 0 হলে, y এর মান নির্ণয় কর।

খ. f(x) = 0 সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

গ. f(x) = 0 এর লেখচিত্রে x এবং y অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায়

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অধ্যায়ে দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট নিয়ে আলোচনা করব।

$x - y = 4$ একটি দুই চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ। কারণ সমীকরণটিতে x ও y দুইটি চলক বা অজ্ঞাত রাশি বর্তমান এবং স্পষ্টই বোঝা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হতে পারে। যেমন, $x = 5, y = 1$ বা, $x = 6, y = 2$ বা, $x = 7, y = 3$ বা, $x = 8, y = 4$ বা, $x = -2, y = -6$ ইত্যাদি। এখন যদি $x - y = 4$ এবং $x + y = 10$ সরল সমীকরণ দুইটি একত্রে বিবেচনা করা হয়, তবে $x - y = 4$ সমীকরণের অসংখ্য সমাধানের মধ্যে শুধুমাত্র $x = 7, y = 3$ সমাধানই দ্বিতীয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে, অর্থাৎ শুধুমাত্র $x = 7, y = 3$ মান দ্বারা $x - y = 4$; $x + y = 10$ সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হয়।

প্রদত্ত দুইটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের এরূপ মান চাওয়া হলে, ঐ সমীকরণ দুইটিকে একত্রে দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট বলা হয় এবং অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে যে মান যুগল দ্বারা সমীকরণ জোট সিদ্ধ হয়, সেগুলোকে সমীকরণ জোটের সমাধান বলা হয়। যেমন, ওপরের সমীকরণ জোটের একমাত্র সমাধান $x = 7, y = 3$, এই সমাধানকে ক্রমজোড়ের ভাষায় $(x, y) = (7, 3)$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

দুই চলকের সমীকরণ জোটের সব সময় অনন্য সমাধান থাকবে এমন নয়। যেমন ,

$$2x - 2y = 8$$
$$3x - 3y = 12$$

সমীকরণ দুইটির $x = 5, y = 1; x = 6, y = 2; x = 7, y = 3$ ইত্যাদি অসংখ্য সমাধান রয়েছে। এখানে সমীকরণ দুইটি আপাত দৃষ্টিতে ভিন্ন ভিন্ন মানের হলেও প্রকৃতপক্ষে তারা একটি সমীকরণের সমতুল। প্রথমটির উভয়পক্ষকে $\frac{3}{2}$ দ্বারা গুণ করলেই দ্বিতীয়টি পাওয়া যায়। এরূপ সমীকরণ জোটকে পরস্পর নির্ভরশীল (dependent) বলা হয়।

সাধারণভাবে বলা যায়, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হলে,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

সমীকরণ জোটের সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল এবং এরূপ সমীকরণ জোটের বাস্তব সংখ্যায় অসংখ্য সমাধান রয়েছে। আবার কোনো সমীকরণ জোটের আদৌ কোনো সমাধান নাও থাকতে পারে।

যেমন, $x - y = 4$
$3x - 3y = 10$

সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান নেই। এরূপ সমীকরণ জোটকে পরস্পর অসামঞ্জস্য বা অসঙ্গাতিপূর্ণ বলা হয়।

$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$
সমীকরণ জোট অসঙ্গাতিপূর্ণ হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

$a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোটের এক বা একাধিক সমাধান থাকলে সমীকরণ জোটকে সঙ্গাতিপূর্ণ বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ হবে

(i) যদি $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ (বা, $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$) হয় [এরূপ ক্ষেত্রে অনন্য সমাধান আছে] ;

অথবা, (ii) যদি $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ হয় [এরূপ ক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান রয়েছে] ;

অসঙ্গতিপূর্ণ হবে যদি $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ হয় [এরূপ ক্ষেত্রে কোনো সমাধান নেই]।

বি: দ্র: $c_1 = c_2 = 0$ হলে, সমীকরণ জোট সর্বদা সঙ্গতিপূর্ণ। সেক্ষেত্রে $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ হলে সমাধান অনন্য হবে; $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ হলে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ কি না ব্যাখ্যা কর এবং সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

(i) $4x + 3y = 7$, $8x + 6y = 14$
(ii) $4x + 3y = 7$, $8x + 6y = 9$
(iii) $4x + 3y = 7$, $8x - 6y = 2$

সমাধান : সমীকরণ জোট (i) এ, $\dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{7}{14}$

$\therefore$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ এবং সমাধান অসংখ্য।

সমীকরণ জোট (ii) এ, $\dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{7}{9}$

$\therefore$ সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ। এর কোনো সমাধান নেই (সমাধানের সংখ্যা শূন্য)।

সমীকরণ জোট (iii) এ, $\dfrac{4}{8} \neq \dfrac{3}{-6}$

$\therefore$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ এবং সমাধান অনন্য।

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের কোনটির সমাধান অনন্য, কোনটির সমাধান নেই, কোনটির অসংখ্য সমাধান আছে, নির্দেশ কর।

(i) $5x + 2y = 16$, $7x - 4y = 2$
(ii) $5x + 2y = 16$, $3x + \dfrac{6}{5}y = 2$
(iii) $5x + 2y = 16$, $\dfrac{15}{2}x + 3y = 24$
(iv) $5x + 2y = 0$, $10x + 4y = 0$
(v) $5x + 2y = 0$, $5x - 2y = 0$

সমাধান :

সমীকরণ জোট (i) এ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{5}{7}$; $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ $\therefore \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ $\therefore$ সমাধান অনন্য।

সমীকরণ জোট (ii) এ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{2}{\frac{6}{5}} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{16}{2} = 8$

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ $\therefore$ সমাধান নেই।

সমীকরণ জোট (iii) এ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{5}{\frac{15}{2}} = 5 \times \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ $\therefore$ অসংখ্য সমাধান আছে।

সমীকরণ জোট (iv) এ, $c_1 = 0, c_2 = 0$ এবং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ অসংখ্য সমাধান রয়েছে।

সমীকরণ জোট (v) এ, $c_1 = 0, c_2 = 0$ এবং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{5} = 1, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-2} = -1$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $\therefore$ সমাধান অনন্য।

প্রশ্নমালা 8.1

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ কি না ব্যাখ্যা কর এবং সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর :

(i) $3x - 4y = 10$, $6x - 8y = 18$ (ii) $3x - 4y = 10$, $6x - 8y = 20$ (iii) $3x - 4y = 10$, $6x + 5y = 46$

2. নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের কোনটির সমাধান অনন্য, কোনটির সমাধান নেই, কোনটির অসংখ্য সমাধান আছে উল্লেখ কর :

(i) $-\frac{1}{2}x + y = -1$, $x - 2y = 2$ (ii) $-\frac{1}{2}x - y = 0$, $x - 2y = 0$ (iii) $-\frac{1}{2}x + y = -1$, $x - 2y = -1$

(iv) $-\frac{1}{2}x + y = 0$, $x + 2y = 0$ (v) $-\frac{1}{2}x + y = -1$, $x + y = 5$

এখন আমরা শুধু পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সঙ্গতিপূর্ণ দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট বিবেচনা করব। এই জাতীয় সমীকরণ জোটের সব সময় অনন্য সমাধান পাওয়া যায়। সমাধান নির্ণয়ের চারটি পদ্ধতি এখানে আলোচিত হবে : (1) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (2) অপনয়ন পদ্ধতি (3) নির্ণায়ক পদ্ধতি (4) লৈখিক পদ্ধতি।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত সমীকরণ জোটের যেকোনোটি থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান অন্যটি দ্বারা প্রকাশ করে ঐ লব্ধ মান অপর সমীকরণটিতে স্থাপন করা হয়।

উদাহরণ 3. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$4x + y = 2$ .... (i)

$2x + 3y = -4$ .... (ii)

সমাধান : দুইটি সমীকরণের যেকোনো একটিকে $y = ax + b$ আকারে লিখি।

প্রথম সমীকরণ থেকে পাই, $y = 2 - 4x$ .... (iii)

সমীকরণ (ii) এ y এর স্থানে $2 - 4x$ বসিয়ে পাই, $2x + 3(2 - 4x) = -4$

বা, $2x + 6 - 12x = -4$ বা, $-10x = -10$ বা, $10x = 10$

$\therefore x = \frac{10}{10} = 1.$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y = 2 - 4.\,1 = 2 - 4 = -2$
$4x + y = 2$ এবং $2x + 3y = -4$ সমীকরণ দুইটি $x = 1$ এবং $y = -2$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।
অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, -2)$.

যে সংখ্যাজোড় সমীকরণ জোটকে সিদ্ধ করে তাকে সমীকরণ জোটের সমাধান বলা হয়। উল্লেখ্য x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়েও y এর মান বের করা যেত। x এবং y এর লব্ধ মান (অর্থাৎ, সমাধান) মূল সমীকরণ দুইটিতে বসিয়ে দেখি যে, ঐ মান দ্বারা সমীকরণ জোট সিদ্ধ হয়।
অতএব, সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

বি: দ্র: সমীকরণের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে কি না তা যাচাই করা শিক্ষার্থীর অবশ্য কর্তব্য।

উদাহরণ 4. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$\frac{3+x}{5} + \frac{y-2}{3} = 2$$

$$\frac{2(x+1)}{3} - \frac{y-1}{4} = 1$$

সমাধান : প্রথমে সমীকরণ দুইটিকে ভগ্নাংশমুক্ত করি। প্রথম সমীকরণের উভয়পক্ষকে 15 দিয়ে গুণ করে পাই,

$3(x+3) + 5(y-2) = 30$
বা, $3x + 9 + 5y - 10 = 30$
বা, $3x + 5y = 31$ .... (i)

দ্বিতীয় সমীকরণের উভয়পক্ষকে 12 দিয়ে গুণ করে পাই, $8(x+1) - 3(y-1) = 12$
বা, $8x - 3y = 1$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণকে পক্ষান্তর করে পাই, $3x = 31 - 5y$

বা, $x = \dfrac{31-5y}{3}$ .... (iii)

(ii) নং সমীকরণে x এর বদলে $\dfrac{31-5y}{3}$ বসিয়ে পাই, $\dfrac{8(31-5y)}{3} - 3y = 1$

বা, $8\,(31-5y) - 9y = 3$ বা, $248 - 40y - 9y = 3$ বা, $-49y = -245$

$\therefore\ y = \dfrac{-245}{-49} = 5.$

এখন (iii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই, $x = \dfrac{31-5.5}{3} = \dfrac{31-25}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 5)$

প্রশ্নমালা 8.2

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে নিচের সমীকরণ জোটগুলোর সমাধান (x, y) নির্ণয় কর:

1. $2x + y = 8$
   $3x - 2y = 5$
2. $7x - 3y = 31$
   $9x - 5y = 41$
3. $2x + 3y = 8$
   $7x + 4y = 15$

4. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$x + \frac{1}{6}y = 3$

5. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
$\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$

7. $x + 5y = 36$
$\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}$

8. $a(x + y) = b(x - y) = 2ab$

9. $x - y = 2a$
$ax + by = a^2 + b^2$

10. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$ax + by = a^2 + b^2$

11. $x + 2y = 3 = 4x - y$

12. $x - 3y = 0 = 20 + y - 2x$

অপনয়ন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে প্রয়োজনবোধে সমীকরণদ্বয়কে এরূপ দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয় যেন গুণ করার পর প্রাপ্ত সমীকরণ দুইটিতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যেকোনোটির সহগদ্বয়ের পরমমান উভয় সমীকরণেই সমান হয়। বড় সংখ্যা দিয়ে গুণ এড়াবার জন্য সাধারণত এমন সংখ্যা দিয়ে গুণ করা হয় যাতে গুণফল একই চলকের সহগ দুইটির ল. সা. গু. হয়। অতঃপর শেষোক্ত সমীকরণ দুইটি যোগ বা বিয়োগ করে এরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যায়, যেখানে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি বর্তমান থাকে। এই প্রক্রিয়ায় একটি অজ্ঞাত রাশি অপসারিত হয় বলে, একে অপনয়ন প্রক্রিয়া বলা হয়।

উদাহরণ 5. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$4x + y = 2$ .... (i)

$2x + 3y = -4$ .... (ii)

সমাধান : সমীকরণ (i) কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$12x + 3y = 6$ .... (iii)

সমীকরণ (iii) থেকে সমীকরণ (ii) বিয়োগ করে পাই,

$10x = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$

$\therefore\ x = \frac{10}{10} = 1.$

এখন সমীকরণ (i) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $4 \quad 1 + y = 2$

$\therefore\ y = 2 - 4 = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, -2)$

বি: দ্র: সমীকরণ (ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত সমীকরণ থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করেও সমাধান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 6. সমাধান নির্ণয় কর ($b \neq 0$ ধরে) :

$ax + by = a^2$

$bx - ay = ab$

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax + by = a^2$ .... (i)

$bx - ay = ab$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) কে যথাক্রমে a এবং b দ্বারা গুণ করে পাই,

$$a^2x + aby = a^3 \text{ .... (iii)}$$
$$b^2x - aby = ab^2 \text{ .... (iv)}$$

সমীকরণ (iii) এবং (iv) যোগ করে পাই, $a^2x + b^2x = a^3 + ab^2$

বা, $(a^2 + b^2)\, x = a(a^2 + b^2)$

$$\therefore x = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = a$$

(i) নং সমীকরণে x এর মান a বসিয়ে পাই, $a^2 + by = a^2$

বা, $by = a^2 - a^2$

বা, $by = 0$

বা, $y = \dfrac{0}{b} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (a, 0)$.

বি: দ্র: $b \neq 0$ ধরায় $b^2 > 0$; সুতরাং $a^2 + b^2 > 0$.

$b = 0$ এবং $a \neq 0$ হলেও সমাধান হিসেবে $x = a, y = 0$ পাওয়া যায়।

উদাহরণ 7. সমাধান নির্ণয় কর :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ .... (i)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \text{ ....(ii)}$$

সমীকরণ (i) কে 3 দ্বারা এবং সমীকরণ (ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\frac{3x}{2} + y = 3 \text{ .... (iii)}$$
$$\frac{2x}{3} + y = 2 \text{ .... (iv)}$$

সমীকরণ (iii) থেকে সমীকরণ (iv) বিয়োগ করে পাই,

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) x = 1 \quad \text{বা, } \frac{5}{6}\, x = 1$$

$$\therefore x = \frac{6}{5}$$

এখন সমীকরণ (iv) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + y = 2 \quad \text{বা, } \frac{4}{5} + y = 2$$

$$\therefore y = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

উদাহরণ 8. সমাধান নির্ণয় কর : $81x + 62y = 138$
$62x + 81y = 5$

সমাধান : দেওয়া আছে , $81x + 62y = 138$ .... (i)
$62x + 81y = 5$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $143x + 143y = 143$

বা, $143(x + y) = 143$

$\therefore\ x + y = 1$ .... (iii)

অতএব, $62(x + y) = 62$

বা, $62x + 62y = 62$ .... (iv)

সমীকরণ (i) থেকে সমীকরণ (iv) বিয়োগ করে পাই, $19x = 76$

$\therefore\ x = \frac{76}{19} = 4$

সমীকরণ (iii) এ $x = 4$ বসিয়ে পাই, $4 + y = 1$

$\therefore\ y = 1 - 4 = -3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4. -3).$

প্রশ্নমালা 8.3

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান (x, y) নির্ণয় কর :

1. $2x + 3y = 7$, $5x - 2y = 8$
2. $6x - y = 1$, $3x + 2y = 13$
3. $7x - 3y = 31$, $9x - 5y = 41$
4. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$, $\frac{5x}{4} - 3y = -3$
5. $\frac{5}{x} + 3y = 8$, $\frac{4}{x} - 10y = 56$
6. $\frac{x}{3} - \frac{2}{y} = 1$, $\frac{x}{6} + \frac{4}{y} = 3$
7. $2x + \frac{3}{y} = 1$, $5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$
8. $12x + 17y = 41$, $17x + 12y = 46$
9. $25x + 27y = 131$, $27x + 25y = 129$
10. $ax + by = ab$, $bx + ay = ab$
11. $ax - by = ab$, $bx - ay = ab$
12. $ax + by = c$, $a^2 x + b^2 y = c^2$

বজ্রগুণন সূত্র

$a_1x + b_1y + c_1z = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ হলে,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$ হবে।

প্রমাণ : প্রথম সমীকরণকে c_2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে c_1 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$c_2a_1x + b_1c_2y + c_1c_2z = 0$$

এবং $c_1a_2x + b_2c_1y + c_1c_2z = 0$

বিয়োগ করে, $(c_2a_1 - c_1a_2)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = 0$

বা, $-(c_1a_2 - c_2a_1)x = -(b_1c_2 - b_2c_1)y$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

পুনরায় প্রথম সমীকরণকে b_2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1z = 0$$

এবং $a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2z = 0$

বিয়োগ করে, $(a_1b_2 - a_2b_1)x + (b_2c_1 - b_1c_2)z = 0$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)x = (b_1c_2 - b_2c_1)z$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

অতএব (1) এবং (2) থেকে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

সমানুপাতের আকারে লিখিত এই সূত্রকে বজ্রগুণন সূত্র বলা হয়।

ওপরের সমীকরণদ্বয়ে $z = 1$ বসালে সমীকরণ দুইটি হয়,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

এবং বজ্রগুণন সূত্র দাঁড়ায়, $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

এ থেকে x এবং y এর মান নির্দিষ্ট করার মাধ্যমে উল্লিখিত সমীকরণ জোটের সমাধান করাকে বজ্রগুণন পদ্ধতি বলা হয়। এটি বিনিয়োগ পদ্ধতির ভিন্নরূপ মাত্র।

উদাহরণ 9. সমাধান কর এবং শুদ্ধি পরীক্ষা কর :

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$3x + 2y + 8 = 0$$

সমাধান : বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{x}{3 \times 8 - 2 \times 7} = \frac{y}{7 \times 3 - 8 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 - 3 \times 3}$$

বা, $\dfrac{x}{24 - 14} = \dfrac{y}{21 - 16} = \dfrac{1}{4 - 9}$

বা, $\frac{x}{10} = \frac{y}{5} = \frac{1}{-5}$

এখন, $x = \frac{10}{-5} = -2$

$y = \frac{5}{-5} = -1$

∴ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (-2, -1)$.

শুদ্ধি পরীক্ষা : $x = -2$ এবং $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$2x + 3y + 7 = 2(-2) + 3(-1) + 7 = -4 - 3 + 7 = 0$

$3x + 2y + 8 = 3(-2) + 2(-1) + 8 = -6 - 2 + 8 = 0$

সুতরাং প্রাপ্ত সমাধান সঠিক।

উদাহরণ 10. বজ্রগুণন সূত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

$3x - y - 7 = 0$

$2x + y - 3 = 0$

সমাধান : বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{x}{(-1)\times(-3) - 1\times(-7)} = \frac{y}{-7\times 2 - (-3)\times 3} = \frac{1}{3\times 1 - 2\times(-1)}$$

বা, $\frac{x}{3+7} = \frac{y}{-14+9} = \frac{1}{3+2}$

বা, $\frac{x}{10} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

∴ $x = \frac{10}{5} = 2$

∴ $y = \frac{-5}{5} = -1$

∴ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, -1)$.

প্রশ্নমালা 8.4

বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমাধান (x, y) নির্ণয় কর এবং সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা কর :

1. $2x + 3y + 5 = 0$, $4x + 7y + 6 = 0$
2. $x + 2y = 7$, $2x - 3y = 0$
3. $3x - 5y + 9 = 0$, $5x - 3y - 1 = 0$
4. $-7x + 8y = 9$, $5x - 4y = -3$
5. $ax - cy = 0$, $ay - cx = a^2 - c^2$
6. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, $ax - by = a^2 - b^2$
7. $ax + by = a^2 + b^2$, $2bx - ay = ab$
8. $\frac{4x + 5y}{40} = x - y$, $\frac{2x - y}{3} + 2y = 10$
9. $y(3 + x) = x(6 + y)$, $3(3 + x) = 5(y - 1)$
10. $(x + 7)(y - 3) + 7 = (y + 3)(x - 1) + 5$, $5x - 11y + 35 = 0$

নির্ণায়ক পদ্ধতি

a, b, c, d যেকোনো সংখ্যা হলে, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ কে একটি দ্বিক্রমের নির্ণায়ক বলে এবং এর মান $ad - bc$ ধরা হয়।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

নির্ণায়ক ব্যবহার করে সমীকরণ জোটের সমাধান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

সমীকরণ জোট,

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

বিবেচনা করি, যেখানে $ad - bc \neq 0.$

এই সমীকরণ জোটের সমাধান, $x = \dfrac{pd - bq}{ad - bc}$, $y = \dfrac{aq - pc}{ad - bc}$

যা অপনয়ন পদ্ধতি বা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাওয়া যায়।

লক্ষণীয় যে, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq$$

$$\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc.$$

সুতরাং ওপরের সমাধানকে এভাবে লেখা যায় :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

এই সূত্র ব্যবহার করে সরাসরি সমাধান নির্ণয় করা যায়। এই সূত্রকে নির্ণায়ক সূত্র বলে।

মন্তব্য : $ad - bc = 0$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট হয় অসঙ্গতিপূর্ণ না হয় নির্ভরশীল (অর্থাৎ, একটি সমীকরণের সমতুল্য)। প্রথম ক্ষেত্রে সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান নেই, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান আছে।

উদাহরণ 11. নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$6x - 2y = 6$$
$$5x + y = 21$$

সমাধান : এখানে x ও y এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6.1 - 5(-2) = 6 + 10 = 16.$$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6.1 - 21.(-2)}{16} = \frac{6 + 42}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

$$\text{এবং } y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6.21 - 5.6}{16} = \frac{126 - 30}{16} = \frac{96}{16} = 6$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 6)$

উদাহরণ 12. সমাধান নির্ণয় কর :

$$3x + 4y = 14$$
$$4x - 3y = 2$$

সমাধান : এখানে x ও y এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3) - 4.4 = -9 - 16 = -25$$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{14(-3) - 2.4}{-25} = \frac{-42 - 8}{-25} = \frac{-50}{-25} = 2$$

এবং $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{3.2 - 4.14}{-25} = \dfrac{6 - 56}{-25} = \dfrac{-50}{-25} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2)$.

উদাহরণ 13. সমাধান নির্ণয় কর (a, b উভয়েই শূন্য নয়) :

$$bx - ay = 0$$
$$ax + by = a^2 + b^2$$

সমাধান : এখানে x ও y এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix} = b.b - a(-a) = b^2 + a^2 = a^2 + b^2$$

a, b উভয়ে শূন্য নয় বলে $a^2 + b^2 > 0$

$$\therefore\ x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a^2 + b^2 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}} = \frac{0.b - (a^2 + b^2).-a}{b^2 + a^2} = \frac{(a^2 + b^2).a}{a^2 + b^2} = a$$

এবং $y = \dfrac{\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & a^2 + b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}} = \dfrac{b(a^2 + b^2) - a.0}{b^2 + a^2} = \dfrac{b(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (a, b)$.

প্রশ্নমালা 8.5

নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান (x, y) নির্ণয় কর :

1. $4x - 2y = 2$, $5x + y = 13$
2. $2x + 5y = 1$, $x + 3y = 2$
3. $3x - 2y = 2$, $5x - 3y = 5$
4. $x - y = 2a$, $ax + by = a^2 + b^2$
5. $ax + by = a - b$, $bx - ay = a + b$
6. $x + y = a + b$, $ax - by = a^2 - b^2$
7. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2$, $2x + 3y = 13$
8. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = a + b$, $\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y}{b^2} = 2$
9. $ax + by = 1$, $bx + ay = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

10. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$2bx + ay = 2ab$

11. $ax + by = a^2 + b^2$
$2bx - ay = ab$

12. $x + y = -1$
$(b+c)x + (c + a) y = -(a + b)$

13. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$ax - by = a^2 - b^2$

14. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$
$ax + by = a^3 + b^3$

লৈখিক পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে লেখ অঙ্কন করে সমাধান নির্ণয় করা হয়। দুই চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ জোটে দুইটি সরল সমীকরণ থাকে। এই দুইটি সমীকরণের লেখ অঙ্কন করলে দুইটি সরলরেখা পাওয়া যায়; তাদের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি প্রদত্ত সমীকরণ জোটের সমাধান। সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে প্রদত্ত সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান নেই।

উদাহরণ 14. লেখের সাহায্যে সমাধান কর :

$3x + y = 6$
$5x + 3y = 12$

সমাধান : প্রথম সমীকরণ থেকে পাই, $y = 6 - 3x$

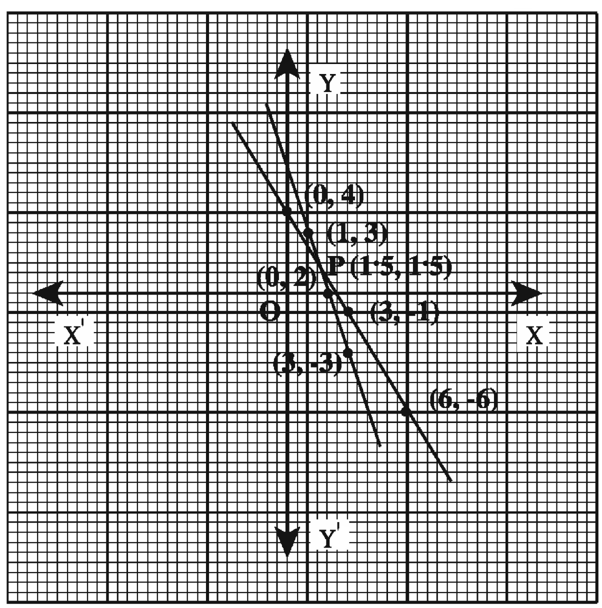
এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি,

x	2	1	3
y	0	3	– 3

দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাই, $3y = 12 - 5x$ বা, $y = \frac{12 - 5x}{3}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি,

x	0	3	6
y	4	–1	– 6



ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে প্রথম সমীকরণের লেখের (2, 0), (1, 3), (3, –3) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে তাদের সংযোগকারী সরলরেখাকে উভয় দিকে বর্ধিত করি। আবার একই অক্ষযুগল ও একক নিয়ে দ্বিতীয় সমীকরণের লেখের (0, 4), (3, –1), (6, – 6) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। এদের সংযোগকারী রেখাংশকে উভয় দিকে বর্ধিত করি। উল্লেখ্য, দুইটি লেখই সরলরেখা। সরলরেখা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দু উভয় সরলরেখারই সাধারণ বিন্দু বলে এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। লেখ থেকে দেখা যায় যে, P বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 1·5 এবং 1·5.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1{\cdot}5, 1{\cdot}5)$.

উদাহরণ 15. লেখের সাহায্যে সমাধান কর :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4$$
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{13}{3}$$

সমাধান : প্রথম সমীকরণ থেকে পাই, $3x+2y=24$

বা, $2y=24-3x$ বা, $y=\dfrac{24-3x}{2}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি,

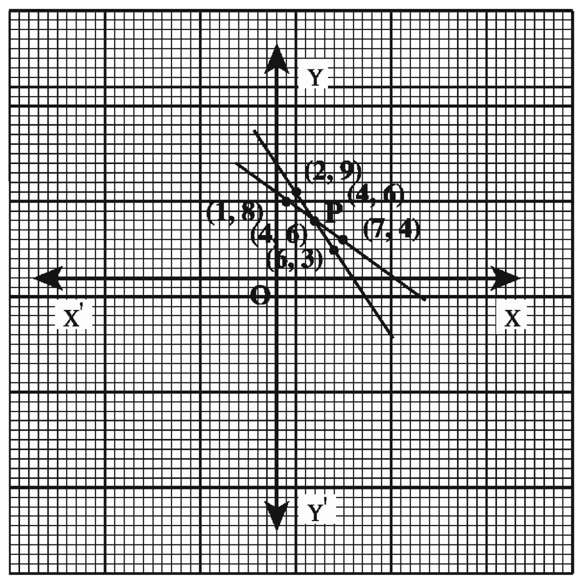
x	4	6	2
y	6	3	9

দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাই, $2x+3y=26$

বা, $3y=26-2x$ বা, $y=\dfrac{26-2x}{3}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি,

x	1	4	7
y	8	6	4



ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে প্রথম সমীকরণের লেখের উল্লিখিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করি। লেখটি একটি সরলরেখা হল। দ্বিতীয় লেখের উল্লিখিত বিন্দুগুলো (একই ছক কাগজে একই অক্ষযুগল ও একক ধরে) স্থাপন করে যোগ করি এবং বর্ধিত করি; এই লেখও একটি সরলরেখা। সরলরেখা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু P বিন্দু উভয় সরলরেখায় অবস্থিত, সেহেতু P বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। লেখ থেকে দেখা যায় যে, P বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 4 এবং 6.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 6)$.

প্রশ্নমালা 8.6

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান (যদি থাকে) নির্ণয় কর :

1. $3x-y=5$
   $3x-2y=4$
2. $2x+5y=7$
   $8x+11y=19$
3. $3x-4y=1$
   $3x+2y=4$
4. $x+y=6$
   $3x+5y=23$
5. $3x+2y=4$
   $6x+4y=9$
6. $5x-3y=10$
   $10x-6y=1$
7. $y-2x+3=0$
   $2y+x-5=0$

সরল সহসমীকরণের ব্যবহার

সমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। অনেক সময় সমস্যায় দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হয়। সেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান x এবং y বা অন্য যেকোনো দুইটি স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়। তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর, সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করে সমীকরণ জোটের সমাধান করলেই x এবং y অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 16. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরে 1 যোগ করলে $\frac{4}{5}$ হয় এবং লব ও হর থেকে 5 বিয়োগ করলে $\frac{1}{2}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ .... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $5(x+1) = 4(y+1)$

বা, $5x + 5 = 4y + 4$

বা, $5x - 4y = -1$ .... (iii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2(x-5) = y - 5$

বা, $2x - y = 5$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) এ নির্ণায়ক সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1+20}{-5+8} = \frac{21}{3} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{25+2}{-5+8} = \frac{27}{3} = 9$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $= \frac{7}{9}$

বি: দ্র: প্রাপ্ত সমীকরণ জোট অন্য যেকোনো পদ্ধতিতে সমাধান করলেও চলবে।

উদাহরণ 17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা এক বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্ক সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান : মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে, $y = 3x + 1$ ....(i)

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি $10y + x$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10y + x = 8(x + y)$

সুতরাং সমীকরণ (i) থেকে y এর মান বসিয়ে পাই, $10(3x+1) + x = 8(x + 3x + 1)$

বা, $31x + 10 = 32x + 8$

বা, $31x - 32x = 8 - 10$

বা, $-x = -2$

সুতরাং, $x = 2$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y = 3x + 1 = 3.2 + 1 = 7$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x + y = 10.2 + 7 = 27$

বিকল্প পদ্ধতি :

মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি $= x$

$\therefore$ একক স্থানীয় অঙ্কটি $= 3x + 1$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x + (3x + 1) = 13x + 1$

আবার, অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি হয়, $10(3x + 1) + x = 31x + 10$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $31x + 10 = 8(x + 3x + 1)$

বা, $31x + 10 = 32x + 8$

বা, $x = 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 13x + 1 = 13.2 + 1 = 26 + 1 = 27.$

উদাহরণ 18. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 50 বছর; যখন পুত্রের বয়স পিতার বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের বয়সের সমষ্টি হবে 102 বছর। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স x বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স y বছর ।

অতএব, প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 50$ .... (i)

পিতা ও পুত্রের বয়সের অন্তর হল, $x - y$ বছর।

সুতরাং, $x - y$ বছর পরে পুত্রের বয়স হবে x বছর এবং পিতার বয়স হবে, $x + (x - y) = 2x - y$ বছর।

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x + (2x - y) = 102$ বা, $3x - y = 102$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $4x = 152$ বা, $x = \frac{152}{4} = 38$ $\therefore x = 38$

x এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই, $y = 50 - x = 50 - 38 = 12$ $\therefore y = 12$

অতএব, পিতার বর্তমান বয়স 38 বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 12 বছর।

উদাহরণ 19. এক ব্যক্তি x টাকা 4% সরল মুনাফা এবং y টাকা 5% সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করে বার্ষিক মুনাফা পান 920 টাকা। যদি তিনি x টাকা 5% এবং y টাকা 4% সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করতেন তবে তাঁর বার্ষিক মুনাফা হত 880 টাকা। x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{4x}{100} + \frac{5y}{100} = 920$ বা, $4x + 5y = 92000$ .... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 880$ বা, $5x + 4y = 88000$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $9(x + y) = 180000$ বা, $x + y = 20000$

$\therefore 4x + 4y = 80000$ .... (iii)

সমীকরণ (i) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই, $y = 12000$

আবার, $x + y = 20000$

$\therefore x = 20000 - y = 20000 - 12000 = 8000$

উত্তর : ঐ ব্যক্তি 8000 টাকা 4% মানাফায় এবং 12000 টাকা 5% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছিলেন।

উদাহরণ 20. কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়ালে এবং প্রস্থ 3 মিটার কমালে ক্ষেত্রফল 18 বর্গমিটার কমে যায়। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়ালে এবং প্রস্থ 3 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটার বাড়ে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রথম শর্তানুসারে , $(x+3)(y-3) = xy - 18$ .... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে , $(x+3)(y+3) = xy + 60$ .... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $3y - 3x - 9 = -18$ বা, $3(y-x) = -9$

বা, $y - x = -3$ .... (iii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $3y + 3x + 9 = 60$ বা, $3(y+x) = 51$

বা, $y + x = 17$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) এবং (iv) যোগ করে পাই, $2y = 14$ বা, $y = 7$

এখন সমীকরণ (iv) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $7 + x = 17$ বা, $x = 17 - 7 = 10$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং প্রস্থ 7 মিটার।

প্রশ্নমালা 8.7

1. কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ এবং হরে 2 যোগ করলে $\frac{1}{2}$ হয় এবং লব থেকে 7 এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
2. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি হয় $\frac{7}{9}$; আবার ঐ ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি হয় $\frac{1}{2}$; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি মূল সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ হয়। সংখ্যাটি কত?
4. দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার একটি অঙ্ক অপরটি অপেক্ষা 1 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে তা পূর্বের সংখ্যার $\frac{5}{6}$ গুণ হয়। সংখ্যাটি কত?
5. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4. সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা হয়,তার এবং প্রদত্ত সংখ্যাটির যোগফল 110. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা তার অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের তিনগুণ। সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল অঙ্ক দুইটির যোগফলের বর্গের সমান হয়। সংখ্যাটি কত?
7. আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?
8. পিতার বর্তমান বয়স তার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির পাঁচগুণ। 10 বছর পরে পিতার বয়স ঐ দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। পিতার বর্তমান বয়স কত?
9. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি y বছর এবং অন্তর 22 বছর। 12 বছর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। y এর মান কত? পুত্রের বর্তমান বয়স কত?

10. আমি যদি $x\%$ সরল মুনাফায় 4000 টাকা এবং $y\%$ সরল মুনাফায় 5000 টাকা বিনিয়োগ করে বার্ষিক মুনাফা পাই 320 টাকা; কিন্তু যদি $x\%$ সরল মুনাফায় 5000 টাকা এবং $y\%$ সরল মুনাফায় 4000 টাকা বিনিয়োগ করতাম, তবে বার্ষিক মুনাফা হত 310 টাকা। x এবং y এর মান নির্ণয় কর।
11. দাঁড় বেয়ে একটি নৌকা স্রোতের অনুকূলে যায় ঘণ্টায় 15 কি. মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি. মি.; স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।
12. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বেয়ে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় কোনো স্থানে পৌছল এবং স্রোতের প্রতিকূলে $3\frac{3}{4}$ ঘণ্টায় ফিরে এল। দাঁড়ের বেগ স্রোতের বেগের কতগুণ?
13. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম এবং প্রস্থ 3 মিটার অধিক হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হয়। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হয়। আয়তটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।
14. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার অধিক হলে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আবার দৈর্ঘ্য 5 মিটার অধিক ও প্রস্থ 2 মিটার কম হলেও ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আয়তটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
15. ABC ত্রিভুজে $\angle B = 6x$ ডিগ্রি, $\angle C = 5x$ ডিগ্রি, $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $6\angle A = 7\angle B$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।
16. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A = (4x+3)$ ডিগ্রি, $\angle B = 2(y-1)$ ডিগ্রি, $\angle C = (2y+17)$ ডিগ্রি এবং $\angle D = (5x+2)$ ডিগ্রি। x এবং y এর মান নির্ণয় কর। [সংকেত : বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি = 2 সমকোণ]
17. x জন শ্রমিক একটি কাজ x দিনে করে দেবে বলে ঠিক করে। কিন্তু তাদের মধ্যে y জন অনুপস্থিত থাকায় কাজটি $2x$ দিনে সম্পন্ন হল। দেখাও যে, $x = 2y$.
18. এক ব্যক্তি মাসিক বেতনে চাকরি করেন। বছর শেষে নির্দিষ্ট ইনক্রিমেন্ট (বেতন বৃদ্ধি) পান। তাঁর মাসিক বেতন 4 বছর পর 3500 টাকা এবং 10 বছর পর 4250 টাকা হলে, মাসিক কত টাকা বেতনে তাঁর চাকরি শুরু হয় এবং বার্ষিক ইনক্রিমেন্ট কত?
19. রসায়ন পরীক্ষাগারে একজন শিক্ষার্থী দেখল যে, একটি বোতলে এসিড আছে দ্রবণের 20% এবং আর একটি বোতলে এসিড আছে দ্রবণের 30%। কোন বোতল থেকে কী পরিমাণ দ্রবণ মিশ্রিত করলে 100 মি. লি. দ্রবণে 27% এসিড থাকবে?

দ্বিঘাত সহসমীকরণ

একটি সরল সমীকরণ এবং একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমীকরণজোটের সমাধান প্রক্রিয়া কতিপয় উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হল।

মনে করি, $x + y = 5$ .... (i)

এবং $x^2 + y^2 = 13$ ....(ii)

সমাধান করতে হবে।

(i) নং সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত y এর মান $y = 5 - x$ (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + (5-x)^2 = 13$ (এটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ)

বা, $x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$ বা, $2x^2 - 10x + 12 = 0$

বা, $2(x^2 - 5x + 6) = 0$ বা, $x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$
বা, $(x - 2)(x - 3) = 0$
$\therefore$ $x = 2$ অথবা 3.
(i) নং সমীকরণে $x = 2$ বসিয়ে পাই, $y = 3$
আবার, (i) নং সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই, $y = 2$
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ জোটের দুইটি সমাধান পাওয়া গেল,
$(x, y) = (2, 3)$ এবং $(x, y) = (3, 2)$

উদাহরণ 21. সমাধান কর : $x^2 + y^2 = 45$
$xy = 18$

সমাধান :
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 45 + 2.18 = 81$ [$\because xy = 18$]
$\therefore x + y = \pm\sqrt{81} = \pm 9.$
আবার, $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 45 - 2.18 = 9$
$\therefore x - y = \pm 3$
মনে করি, $x + y = 9$ এবং $x - y = 3$
এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করে পাই, $x = 6, y = 3$
আবার, $x + y = -9$ এবং $x - y = 3$ ধরে সমাধান পাই, $x = -3, y = -6$
পুনরায়, $x + y = 9, x - y = -3$ ধরে সমাধান পাই, $x = 3, y = 6$
পরিশেষে , $x + y = -9$ এবং $x - y = 3$ ধরে পাই, $x = -6, y = -3$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (6, 3), (-3, -6), (3, 6), (-6, -3).$
বি: দ্র: এখানে প্রদত্ত প্রত্যেক সমীকরণের ঘাত 2 এবং $2 \times 2 = 4$টি সমাধান পাওয়া গেল।

উদাহরণ 22. সমাধান কর : $x - y = 2$ এবং $xy = 8$

সমাধান : $x - y = 2$ .... (i) এবং $xy = 8$ .... (ii)
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y = x - 2$
(ii) নং সমীকরণে $y = x - 2$ বসিয়ে পাই, $x(x - 2) = 8$
বা, $x^2 - 2x - 8 = 0$ বা, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore x = 4, -2$
সমীকরণ (i) বা (ii) এ x এর সংশ্লিষ্ট মান বসিয়ে পাই, $y = 2, -4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 2), (-2, -4)$

বিকল্প পদ্ধতি :

$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 2^2 + 4.8 = 36$
$\therefore x + y = \pm 6$ .... (iii)
$x + y = 6$ হলে আমরা পাই,
$(x, y) = (4, 2)$
আবার, $x + y = -6$ হলে,
$(x, y) = (-2, -4)$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 2), (-2, -4)$

উদাহরণ 23. সমাধান কর : $6x^2 + 7xy - 3y^2 = 90$
$2x + 3y = 18$

সমাধান : $6x^2 + 7xy - 3y^2 = 90$ .... (i)
$2x + 3y = 18$ .... (ii)
$\therefore$ (i) এর বামপক্ষ $= 6x^2 + 7xy - 3y^2 = 6x^2 + 9xy - 2xy - 3y^2$
$= 3x(2x + 3y) - y(2x + 3y) = (2x + 3y)(3x - y)$
$= 18(3x - y)$ [$\because 2x + 3y = 18$]
$\therefore 18(3x - y) = 90$
বা, $3x - y = 5$ .... (iii)
বা, $9x - 3y = 15$ .... (iv)
$\therefore$ (ii) ও (iv) যোগ করে পাই, $11x = 33 \quad \therefore x = 3$
সমীকরণ (iii) থেকে পাই, $y = 3x - 5 = 3.3 - 5 = 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 4)$

বি: দ্র: প্রদত্ত সমীকরণ জোট
$3x - y = 5$
$2x + 3y = 18$
সরল সমীকরণ জোটের সমতুল। তাই একটি মাত্র সমাধান পাওয়া গেল।

প্রশ্নমালা 8.8

সমাধান কর :

1. $x^2 + y^2 = 25$
   $x - 2y = 10$
2. $2x^2 + y^2 = 3$
   $x + y = 2$
3. $x^2 + y^2 = 61$
   $xy = -30$
4. $x^2 + y^2 = 85$
   $xy = 42$
5. $2x + y = 7$
   $xy = 3$
6. $x^2 - y^2 = 45$
   $x + y = 5$
7. $x^2 - y^2 = 99$
   $x - y = 9$
8. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$
   $x + y = 10$
9. $2x + y = 7$
   $x^2 - xy = 6$
10. $x^2 - xy + y^2 = 21$
    $x + y = 3$
11. $x^2 + xy + y^2 = 3$
    $x^2 - xy + y^2 = 7$
12. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$
    $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 21$

দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

উদাহরণ 24. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 650 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 323 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

সমাধান : মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ x মিটার, অপরটির বাহুর পরিমাণ y মিটার।

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 650$ .... (i)

এবং $xy = 323$ .... (ii)

$\therefore (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 650 + 646 = 1296$

$\therefore x + y = \pm \sqrt{1296} = \pm 36$

এখন, $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 650 - 646 = 4$

$\therefore x - y = \pm 2.$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, সেহেতু $x + y$ এর মান ধনাত্মক হতে হবে।

$\therefore x + y = 36$ ....(iii)

$x - y = \pm 2$ .... (iv)

$\therefore$ যোগ করে, $2x = 36 \pm 2$

$\therefore x = \dfrac{36 \pm 2}{2} = 18 \pm 1 = 19$ বা, 17.

সমীকরণ (iii) থেকে পাই, $y = 36 - x = 17$ বা, 19.

$\therefore$ একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 19 মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 17 মিটার।

উদাহরণ 25. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ $= y$ মিটার

প্রশ্নমতে, $2y - x = 10$ .... (i)

$xy = 600$ .... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে, $2y = 10 + x$ বা, $y = \dfrac{10 + x}{2}$

সমীকরণ (ii) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $\dfrac{x(10 + x)}{2} = 600$

বা, $\dfrac{10x + x^2}{2} = 600$ বা, $x^2 + 10x = 1200$

বা, $x^2 + 10x - 1200 = 0$ বা, $(x + 40)(x - 30) = 0$

সুতরাং, $x + 40 = 0$ অথবা, $x - 30 = 0$

অর্থাৎ, $x = -40$ বা, $x = 30$

দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না,

$\therefore x = 30$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= 30$ মিটার।

উদাহরণ 26. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 3. সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক $= x$

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক $= y$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে , $\frac{10x+y}{xy} = 3$

বা, $10x + y = 3xy$ .... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে , $10x + y + 18 = 10y + x$ বা, $9x - 9y + 18 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$ বা, $y = x + 2$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এ $y = x + 2$ বসিয়ে পাই, $10x + x + 2 = 3.x\,(x + 2)$

বা, $11x + 2 = 3x^2 + 6x$ বা, $3x^2 - 5x - 2 = 0$

বা, $3x^2 - 6x + x - 2 = 0$ বা, $3x(x - 2) + 1(x - 2) = 0$

বা, $(x - 2)(3x + 1) = 0$

সুতরাং, $x - 2 = 0$ অথবা, $3x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = 2$ বা, $3x = -1$ বা, $x = -\frac{1}{3}$

কিন্তু সংখ্যার অঙ্ক ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

সুতরাং $x = 2$ এবং $y = x + 2 = 2 + 2 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি = 24.

প্রশ্নমালা 8.9

1. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

2. দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 13 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 6; সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

4. দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90. সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

5. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

6. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

7. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

8. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 2. সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

9. একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং একটি কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

10. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। নিচের কোন শর্তে $a_1x + b_1y = c_1$ ও $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ ?

ক. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ খ. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

গ. $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ঘ. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

২। $ax = 0$ এবং $a^2x + b^2y = b^3$ সমীকরণ জোটের সমাধান হল-

ক. (a, b) খ. $(0, b^3)$

গ. $(0, b)$ ঘ. (a^2, b^2)

৩। জনাব আরেফিন x জন বালককে y টি আম এমনভাবে ভাগ করে দিলেন যেন প্রত্যেকে 6 টি করে আম পাওয়ার পরও 6টি আম অবশিষ্ট থাকে। বর্ণনাটি নিচের কোন সমীকরণটি দ্বারা প্রকাশ করা যায়?

ক. $x = 6y + 6$ খ. $y = 6x + 6$

গ. $x = 6y - 6$ ঘ. $y = 6x - 6$

৪। দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 3 এবং গুণফল 2 . এদের বর্গের সমষ্টি-

ক. 1 খ. 2

গ. 3 ঘ. 5

৫। নিচের গাণিতিক বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র (3, 0) বিন্দুগামী।

ii. $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ax - by$

iii. $x^2 + y^2 = 9$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৬। নিচের গাণিতিক বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. $x - 3y = 4$ এর লেখচিত্র একটি সরলরেখা

ii. $4x = 5$ হল x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

iii. $x = a, y = b$ এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (a, b)।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

অনিক ও আয়েশার নিকট যথাক্রমে x ও y সংখ্যক কমলা আছে। অনিকের আয়েশা অপেক্ষা 2 টি কমলা বেশি আছে।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৭ – ৯) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৭। ওপরের বর্ণনা সাপেক্ষে নিচের কোনটি সঠিক সমীকরণ?

ক. $x + 2 = y$ খ. $x = y + 2$

গ. $x + y = 2$ ঘ. $x + y + 2 = 0$

৮। আয়েশার নিকট 1 টি কমলা থাকলে দুইজনের মোট কয়টি কমলা আছে ?

ক. 1 খ. 2

গ. 3 ঘ. 4

৯। একটি কমলার দাম 5 টাকা হলে, দুইজনের কমলার মোট মূল্য কত টাকা?

ক. 4 খ. 5

গ. 15 ঘ. 20

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার। যেখানে, দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সম্পর্ককে $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = \frac{67}{7}$ এবং $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2}$ দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

ক. প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $ax + by = c$ আকারে প্রকাশ কর।

খ. অপনয়ন পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান করে বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. বাগানের ভিতরে চারদিকে 3 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। প্রতিটি 50 সে.মি. বর্গাকার পাথর দ্বারা রাস্তাটি বাঁধাই করতে কয়টি পাথর লাগবে তা নির্ণয় কর।

২। $3x - y = 5$

$3x - 2y = 4$

ক. সমীকরণ জোটটি সঙ্গতিপূর্ণ কিনা ব্যাখ্যা কর। সমাধানের সংখ্যা বের কর।

খ. বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণ জোটের সমাধান কর এবং (খ) নম্বর প্রশ্নে প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

নবম অধ্যায়

সান্ত ধারা

যদি কতকগুলো সংখ্যা বা রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... এভাবে পর পর সাজানো যায়, তাহলে একটি অনুক্রম (Sequence) পাওয়া যায়। এভাবে গঠিত অনুক্রমের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... সংখ্যা বা রাশিকে যথাক্রমে প্রথম পদ, দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় পদ, ... বলা হয়। যেমন, 3, 5, 9, 14, 29, 43, ... অনুক্রমের যথাক্রমে তার প্রথম পদ, দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় পদ ইত্যাদি। ওপরের উদাহরণে অনুক্রমটির শেষ পদ আছে কি নেই, থাকলে কত, বোঝা যায় না। আবার 2, 4, 6, 8, ..., 40 অনুক্রমটির শেষ পদ 40. কোনো অনুক্রমের পদগুলো পর পর + চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়। $3 + 7 + 11 +$ .... একটি ধারা এবং 3, 7, 11, ... যথাক্রমে ধারাটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় পদ। কোনো অনুক্রমের পদগুলো কোনো বিশেষ নিয়মানুসারে সাজানো গেলে সহজেই সাধারণ পদ বা r তম পদ নির্ণয় করা যায়।
যেমন, 2, 4, 6,............... অনুক্রমটির r তম পদ 2r.

সমান্তর ধারা

$2 + 4 + 6 +$ .... $+ 20$ একটি ধারা যার প্রথম পদ হল 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 6.

এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ $= 4 - 2 = 2$.
তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ $= 6 - 4 = 2$. এই ধারায় যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের বিয়োগফল সর্বদা একই সংখ্যা।

এভাবে প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উল্লিখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2. ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এটি একটি সান্ত (বা সসীম) ধারা। যে ধারায় কোনো পদকে তার পরবর্তী পদ থেকে বিয়োগ করলে একই সংখ্যা বা রাশি পাওয়া যায়, তাকে **সমান্তর ধারা** বলে এবং এই বিয়োগফলকে ধারার **সাধারণ অন্তর** বলে। উল্লেখ্য, সাধারণ অন্তর **ধনাত্মক** বা **ঋণাত্মক** হতে পারে।

r তম পদ [সাধারণ পদ]

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 3.

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 5 + 3 = 5 + 1.3$

তৃতীয় পদ $= (5 + 3) + 3 = 5 + (3 + 3) = 5 + 2.3$

চতুর্থ পদ $= (5 + 2.3) + 3 = 5 + 3.3$

$\therefore$ r-তম পদ $= 5 + (r - 1).\ 3 = 3r + 2$.

সূত্র : একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, r তম পদ $= a + (r - 1).\ d$.

উদাহরণ 1. $5 + 8 + 11 + 14 +$ .....ধারাটির কোন পদ 302 ?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 5$
সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 3$
মনে করি, r তম পদ $= 302$
r তম পদ $= a + (r - 1)d$
$\therefore a + (r - 1)d = 302$
বা, $5 + (r - 1).3 = 302$
বা, $(r - 1).3 = 302 - 5 = 297$

$\therefore\ r-1 = \frac{297}{3} = 99$

বা, $r = 99 + 1 = 100$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 100 তম পদ = 302

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

উদাহরণ 2. 7 + 12 + 17 + ...ধারাটির 25 টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 7$

সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

পদ সংখ্যা, $r = 25$

$\therefore$ 25 তম পদ = $a + (r-1)d = 7 + 24 \times 5 = 127$

মনে করি, 25 টি পদের সমষ্টি = S

$\therefore\ S = 7 + 12 + 17 + \ldots\ldots\ldots + 117 + 122 + 127$

বিপরীতক্রমে লিখে,

$S = 127 + 122 + 117 + \ldots\ldots\ldots + 17 + 12 + 7$

ধারা দুইটির অনুরূপ পদগুলো যোগ করে পাই,

$2S = 134 + 134 + 134 + 134 + \ldots\ldots\ldots + 134 + 134 + 134$

$= 134 \times 25$ [কেননা পদের সংখ্যা $= 25$]

$\therefore\ S = \frac{134 \times 25}{2} = 67 \times 25 = 1675.$

ওপরের সমাধানে নিচের সাধারণ সূত্র পাওয়া যায়।

মনে করি, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d বিশিষ্ট একটি সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি হচ্ছে S এবং উক্ত ধারাটির শেষ পদ হচ্ছে p . কাজেই লিখতে পারি,

$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots\ldots + (p-2d) + (p-d) + p \ldots\ldots\ldots$ (i)

পদগুলো বিপরীতক্রমে সাজিয়ে লিখলে পাই,

$S = p + (p-d) + (p-2d) + \ldots\ldots\ldots + (a+2d) + (a+d) + a \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে পাই,

$2S = (a+p) + (a+p) + (a+p) + \ldots\ldots + (a+p) + (a+p) + (a+p)$

$= n(a+p)$

$\therefore\ S = \frac{n}{2}(a+p) \ldots\ldots\ldots$ (iii)

শেষ পদ $p = n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

সমীকরণ (iii) এ p এর মান বসিয়ে পাই,

$S = \frac{n}{2}(a+p) = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \ldots\ldots\ldots$ (iv)

লক্ষ করি, প্রথম পদ, শেষ পদ এবং পদ সংখ্যা দেওয়া থাকলে (iii) এর সূত্র, আবার প্রথম পদ, সাধারণ অন্তর এবং পদ সংখ্যা দেওয়া থাকলে (iv) এর সূত্র ব্যবহার করে সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

অনেক সময় n সংখ্যক পদের সমষ্টি S এর পরিবর্তে S_n রূপে লেখা হয়।

উদাহরণ 3. 11 + 18 + 25 + 32 + ... ধারাটির 29 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 11$

সাধারণ অন্তর $d = 18 - 11 = 7$

পদ সংখ্যা $n = 29$

$\therefore$ যোগফল, $S = \frac{n}{2}\ \{2a + (n-1)d\}$

$$= \frac{29}{2}\ (2.11 + 28.7) = \frac{29}{2}(22 + 196) = \frac{29}{2} \times 218 = 29 \times 109 = 3161.$$

উদাহরণ 4. $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n =$ কত?

সমাধান : ১ম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 2 - 1 = 1$, শেষ পদ n, পদ সংখ্যা $= n$.

$\therefore$ যোগফল, $S = \frac{n}{2}\ (1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$

অতএব, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \frac{n(n+1)}{2}$

প্রশ্নমালা 9.1

1. $5 + 8 + 11 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ধারার কোন পদ 383 ?
2. কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ m^2 এবং n তম পদ n^2 হলে, ধারাটির $(m + n)$ তম পদ কত?
3. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 99 =$ কত?
4. $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ধারাটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
5. $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 59 =$ কত?
6. $29 + 25 + 21 + \ldots\ldots\ldots\ldots - 23 =$ কত?
7. একটি সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, তার প্রথম 23 পদের সমষ্টি কত?
8. কোনো ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি $n(n + 1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।
9. দেখাও যে, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 125 = 169 + 171 + 173 + \ldots\ldots + 209$
10. $9 + 7 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।
11. 2000 সালের জানুয়ারি মাসে একজন চাকুরীজীবির মূল বেতন 10,000 টাকা। প্রতি বছরে তাঁর মাসিক বেতন 300 টাকা করে বৃদ্ধি পেলে, 2005 সালের জানুয়ারি মাসে তাঁর মূল বেতন কত হবে?
    মূল বেতন থেকে প্রতি মাসে 10% হারে ভবিষ্যৎ সঞ্চয় তহবিলের জন্য টাকা কেটে রাখলে 2005 সালের ৩১শে জানুয়ারি পর্যন্ত তিনি কত টাকা বেতন পাবেন?

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2$ ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে হলে, বিশেষ কৌশল প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।

মনে করি, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2$

আমরা জানি, $r^3 - (r-1)^3 = r^3 - (r^3 - 3r^2 + 3r - 1)$

$$= 3r^2 - 3r + 1.$$

এখানে, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

....

....

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

যোগ করে, $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 + 1 + ... + 1)$

$$= 3S - \frac{3n(n+1)}{2} + n \left[\because 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\therefore 3S = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি

মনে করি, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

এখানে নিচের কৌশল প্রয়োগ করা অত্যন্ত সুবিধাজনক।

$$(r+1)^2 r^2 - r^2(r-1)^2 = r^2\{(r+1)^2 - (r-1)^2\}$$
$$= r^2.4r = 4r^3$$

এখানে, $r = 1, 2, 3, ..., n$ বসিয়ে পাই,

$2^2.1^2 - 1^2.\ 0^2 = 4.1^3$

$3^2.2^2 - 2^2.1^2 = 4.2^3$

$4^2.3^2 - 3^2.2^2 = 4.3^3$

....

....

....

$(n+1)^2\ .n^2 - n^2\ (n-1)^2 = 4.n^3$

যোগ করে, $(n+1)^2.n^2 = 4.(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = 4S$

$$\therefore S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

বিঃ দ্রঃ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

উদাহরণ 5. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225 = (15)^2$

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2} = 15$ বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$ বা, $(n+6)(n-5) = 0$

$\therefore n = 5$ [কেননা n ঋণাত্মক হতে পারে না]

ফলে ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{5.6.11}{6} = 55.$

গুণোত্তর ধারা

$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots\ldots$ ধারায়,
প্রথম পদ $= 3$, দ্বিতীয় পদ $= 6$, তৃতীয় পদ $= 12$, চতুর্থ পদ $= 24$ ইত্যাদি।
প্রথম পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত $= \frac{6}{3} = 2$
দ্বিতীয় পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত $= \frac{12}{6} = 2$
তৃতীয় পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত $= \frac{24}{12} = 2$
যে ধারার কোনো পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে। ওপরের ধারাটি গুণোত্তর ধারা এবং এই ধারায় সাধারণ অনুপাত 2.
১ম পদ $= 3$
সাধারণ অনুপাত $= 2$
$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 3.2 = 6$
তৃতীয় পদ $= 3.2^2 = 12$
চতুর্থ পদ $= 3.2^3 = 24$
সাধারণভাবে, r তম পদ $= 3.2^{r-1}$
একইরূপে যে গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত q, তার r তম পদ aq^{r-1}.

উদাহরণ 6. $4 + 12 + 36 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রথম পদ $a = 4$
সাধারণ অনুপাত $q = \frac{12}{4} = 3$
$\therefore$ অষ্টম পদ $= aq^7 = 4.3^7 = 8748.$

গুণোত্তর ধারার (n সংখ্যক) পদের সমষ্টি

একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত q হলে, n পদ পর্যন্ত ধারাটি হয়
$a + aq + aq^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aq^{n-1}$
মনে করি, $S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aq^{n-1}$ .... (i)
উভয়পক্ষে q দ্বারা গুণ করে পাই, $Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + aq^n$ .... (ii)
(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,
$S - Sq = a - aq^n$
বা, $S(1 - q) = a(1 - q^n)$
বা, $S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, ($q \neq 1$ ধরে)
$q < 1$ হলে, $(1 - q^n)$ ও $(1 - q)$ উভয়ই ধনাত্মক এবং এক্ষেত্রে
$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ সূত্রের ব্যবহারই শ্রেয়, আবার $q > 1$ হলে, $(1 - q^n)$ ও $(1 - q)$ উভয়ই ঋণাত্মক এবং এক্ষেত্রে $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ সূত্রের প্রয়োগই শ্রেয়।
বি: দ্র : $q = 1$ হলে, প্রত্যেক পদ $= a$ এবং $S = na$.

উদাহরণ 7. $2 + 6 + 18 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির 8 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $q = \dfrac{6}{2} = 3$

এখানে, $n = 8$

$\therefore$ সমষ্টি $S = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \dfrac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6560$

উদাহরণ 8. একটি গুণোত্তর ধারার ১ম ও ২য় পদ যথাক্রমে 125 এবং 25 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম পদ, $a = 125$

২য় পদ $= 25$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত $q = \dfrac{25}{125} = \dfrac{1}{5}$

পঞ্চম পদ $= aq^4 = 125.\left(\dfrac{1}{5}\right)^4 = 125.\dfrac{1}{5^3 5} = \dfrac{1}{5}$

ষষ্ঠ পদ $= aq^5 = 125.\left(\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

উদাহরণ 9. $3 - 6 + 12 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যেখানে ১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অনুপাত $q = \dfrac{-6}{3} = -2 < 1$

পদ সংখ্যা $n = 10$

$\therefore$ প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

$$= \frac{3\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = \frac{3(1 - 1024)}{3} = -1023$$

উদাহরণ 10. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $q = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{1}{3} < 1$

পদ সংখ্যা $n = 5$

$\therefore$ প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{243 - 1}{243}\right) = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}} \times \frac{\cancel{242}^{\,121}}{\cancel{243}_{\,81}} = \frac{121}{81}$$

প্রশ্নমালা 9.2

1. দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + 10^3$
$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 10)^2$

2. $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3}{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n} = 210$ হলে, n এর মান কত?

3. $128 + 64 + 32 + \ldots\ldots$ ধারাটির নবম পদ কত?

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

5. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

6. $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারা ভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

8. $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

9. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ধারাটির $(2n + 1)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

10. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots$ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

11. $6 + 12 + 24 + \ldots\ldots + 384$ ধারাটির সমষ্টি কত?

12. $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots$ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

13. 1 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি লৌহদন্ডকে 10 টি টুকরায় বিভক্ত করা হল যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। নিচের কোনটি প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র ?

ক. $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ খ. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

গ. $\frac{n(n+1)}{2}$ ঘ. $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

২। x + y + z + w + ... ধারাটি গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য?

ক. $\frac{y}{x}=\frac{w}{z}$ খ. $y-x=w-z$

গ. $\frac{x}{y}=\frac{w}{z}$ ঘ. $x-y=z-w$

৩। নিচের কোনটি a – a + a – a + ... ধারাটির 21 তম পদ ?

ক. – a খ. a

গ. 21 a ঘ. – 21 a

৪। নিচের বাক্যগুলো লক্ষ কর :

i. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii. যদি r > 1 হয়, তবে $a+ar+ar^2+ \dots\dots + ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

iii. কোন গুণোত্তর ধারার n তম পদ = ar^n

ওপরের বাক্যের প্রেক্ষিতে নিচের কোন উত্তরটি সঠিক?

ক. i ও iii খ. i ও ii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

log 3 + log 9 + log 27 + ...

৫। ধারাটির সাধারণ অন্তর নিচের কোনটি?

ক. log 3 খ. log 9

গ. 2 log 3 ঘ. 3 log 3

৬। ধারাটির 10 তম পদ কত?

ক. log 1000 খ. log 9000

গ. log 72900 ঘ. log 59049

৭। ধারাটির প্রথম 15 টি পদের সমষ্টি কত?

ক. 12 log 3 খ. 15 log 3

গ. 120 log 3 ঘ. 150 log 3

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a , সাধারণ অনুপাত r , ধারাটির পঞ্চম পদ $3\sqrt{3}$ এবং অষ্টম পদ – 27 ।

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ধারাটির 15 তম পদ নির্ণয় কর।

গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 11 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২। 2001 সালের জানুয়ারি মাসে একজন সরকারি চাকুরিজীবি 10,000 টাকা বেতন পান। প্রতি বছর মাসিক বেতন 400 টাকা করে বৃদ্ধি পায়।

ক. তাঁর মাসিক বেতন একটি সমান্তর ধারায় প্রকাশ কর।

খ. সমান্তর ধারাটি সমাধান করে 2006 সালের জানুয়ারি মাসের মূল বেতন নির্ণয় কর।

গ. মূল বেতন থেকে প্রতি মাসে 15% হারে ভবিষ্যৎ তহবিলে কর্তন করলে 25 বছরে ভবিষ্যৎ তহবিলে মোট কর্তনের পরিমাণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1.1

1. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\in$ (iv) $\notin$ (v) $\notin$
2. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\subset$
3. (i) $\{4\}$ (ii) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (iii) $\varnothing$ (iv) $\{2, 4, 6, 8\}$
   (v) $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ (vi) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
4. (i) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315\}$
   $B = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525\}$
   (ii) $\{36\}$ (iii) $\varnothing$
5. $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b\}$, $A \cap B = \{3\}$
6. অন্যতম উত্তর : $\{-1, 0, 1\}$, $\{-1, 0, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.
7. $\varnothing$ 8. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \varnothing$
9. (i) $\{1, 3, 5\}$ (ii) $\{3, 5\}$ (iii) $\{2, 4, 6\}$
   (iv) $\{1, 3, 5\}$ (v) $\{1, 2, 4, 6\}$ (vi) $\{\ \}$
12. 1% 13. 4, 13

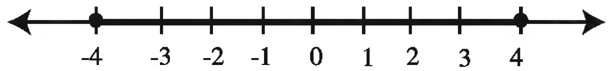
প্রশ্নমালা 1.2

1. $P(B) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \varnothing\}$
2. $P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$
3. $x = 2$, $y = 1$ 4. $(2, 3)$
5. $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$
   $B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$
6. $A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$
   $B \times A = \{(p, a), (p, b), (p, c), (q, a), (q, b), (q, c)\}$
7. $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$
   $A \times (B \cap C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$
8. $A \times B = \{(a, 0)\}$, $B \times A = \{(0, a)\}$
9. $\left\{\left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$
10. $A \times B = \{(c, l), (c, g), (l, l), (l, g), (f, l), (f, g)\}$
11. {(অনু, রাহি), (অনু, মাশা), (সুমন, রাহি), (সুমন, মাশা), (মীম, রাহি), (মীম, মাশা)}
12. { (আকরাম, বুলবুল), (আকরাম, নান্নু), (বুলবুল, নান্নু), (বুলবুল, আকরাম), (নান্নু, আকরাম), (নান্নু, বুলবুল) }।

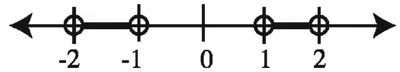
প্রশ্নমালা 2

1. (i) 4·12 (ii) 4·24, (iii) 0·87, (iv) 2· 41, (v) 0· 41 সংখ্যা রেখায় নিজে দেখাও।

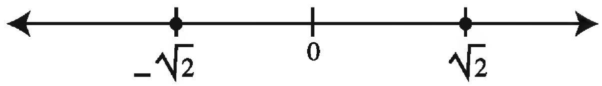
2. (i) $\{ x \in R : -4 \leq x \leq 4 \}$



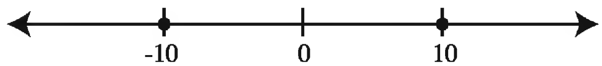
(ii) $\{ x \in R : 1 < x < 2$ অথবা $-2 < x < -1\}$



(iii) $\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$



(iv) $\{ 10, -10 \}$



3. (i) 1 (ii) 7 (iii) 10
4. (i) $\{ x \in R : 1 < x < 9 \}$ (ii) $\{ 1, 9 \}$ (iii) $\{ x \in R : x < 1$ অথবা $x > 9 \}$
5. নিজে কর [অনেক উত্তর হতে পারে]।
6. নিজে কর [অনেক উত্তর হতে পারে]।
7. নিজে কর [অনেক উত্তর হতে পারে]।
8. (i) $\left\{x : -3 < x < \frac{5}{3}\right\}$ (ii) $\left\{ \frac{-13}{2}, \frac{-17}{4}\right\}$
9. 0·318
10. 2·4392
11. (i) 5·5451 (ii) 0·1010.

প্রশ্নমালা 3.1

1. (i) $a^2 + 6ab + 9b^2$ (ii) $a^2b^2 - 2abc + c^2$ (iii) $x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$

   (iv) $9p^2 + 16q^2 + 25r^2 + 24pq - 40qr - 30pr$

   (v) $\frac{a^2}{4} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a}{b} - \frac{4}{bc} - \frac{a}{c}$

   (vi) 992016 (vii) $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy + 2bcyz - 2caxz$

2. (i) $196y^2$ (ii) $(2a - 2b)^2$ (iii) 2·25
3. 50 4. $a^2 + 2$ 5. $\pm p$ 6. ± 4 7. 2 8. 1 9. (i) 74 (ii) 35
11. একাধিক উত্তর সম্ভব, যেমন, $23^2 - 22^2$, $9^2 - 6^2$, $7^2 - 2^2$ ইত্যাদি।
12. 71 13. $2p^2 - 2q$ 14. 14 15. c 19. 10 20. 0
21. $(x + 4)^2 - 6^2$

প্রশ্নমালা 3.2

1. (i) $abc + (ab + bc + ca)x + (a + b + c)\,x^2 + x^3$
   (ii) $24 + 26x + 9x^2 + x^3$
2. (i) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
   (ii) $a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c - 3bc^2 - 6abc$
   (iii) 65450827
3. (i) $2(x^3 + y^3 + z^3)$ (ii) $8a^3$ (iii) $8\,(b + c)^3$
4. 8 5. 9 6. 54 8. 0 9. 665 11. 39
12. $\frac{79}{3}$, 135 13. 34 14. $18\sqrt{3}$

প্রশ্নমালা 3.3

1. $3ab(a + 2b + 4ab)$ 2. $(x + 5y)\,(a + 3b)$
3. $(a + b)\,(x + y)$ 4. $(1 + a)\,(1 + b)$
5. $(a - 1)\,(b + 1)$ 6. $(a - b + c)\,(a - b - c)$
7. $(ax + by + ay - bx)\,(ax + by - ay + bx)$
8. $(a + b - 3c)\,(a + b - 3c + 1)\,(a + b - 3c - 1)$
9. $(2x + y - z)\,(2x - y + z)$ 10. $(a^2 + 2a + 2)\,(a^2 - 2a + 2)$
11. $(x^2 + 3x + 5)\,(x^2 - 3x + 5)$ 12. $3(2a^2 + 2ab + b^2)\,(2a^2 - 2ab + b^2)$
13. $(a - b)\,(a + b - 2c)$ 14. $(x^2 + 2x + 3)\,(x^2 - 2x + 3)$
15. $(a^2 + 5a - 1)\,(a^2 - 5a - 1)$ 16. $(c + a - b)\,(c - a + b)$
17. $(a + b - 1)\,(a - b + 1)$ 18. $(R - r)\,(R - 3r)$
19. $(a + 2)\,(a^2 - 2a + 4)$ 20. $m(m - 2)\,(m^2 + 2m + 4)$
21. $(x + 2)\,(x^2 + x + 1)$ 22. $(2 - a + b)\,(4 + a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab)$
23. $(a - b)\,(2a^2 + 5ab + 8b^2)$ 24. $mn\,(m - n)$
25. $(y + 1)\,(a - y - 1)$ 26. $\sqrt{2}x\,(1 + \sqrt{2}x)$
27. $(x + \sqrt{3})\,(x^2 - \sqrt{3}x + 3)$ 28. $A\,(R - r)\,(R^2 + Rr + r^2 + hR + hr)$
29. $(x + a + 2)\,(x - a + 1)$ 30. $(x^2 + 3x - 2)^2$
31. $(4x - 5y)\,(4x + 5y - 2z)$ 32. $4\pi r\,(3R^2 + 3Rr + r^2)$
33. $\frac{1}{2}\,mu\,(2v + 3u)$ 34. $(\sqrt{2}x + 5)\,(2x^2 - 5\sqrt{2}x + 25)$

প্রশ্নমালা 3.4

1. $(x + 5)\,(x - 4)$ 2. $(x - 10)\,(x + 2)$
3. $(x - 10)\,(x - 2)$ 4. $(x - 20)\,(x + 1)$
5. $(x - 20)\,(x - 1)$ 6. $(y + 3)\,(y - 1)$

7. $(u-18)(u-12)$
8. $(a^2+5)(a+1)(a-1)$
9. $(x^2-8)(x^2-2)$
10. $(x^3-4)(x^3-3)$
11. $(x^3y^3-3)(x^3y^3+2)$
12. $(a^4-2)(a^4+1)$
13. $(x+y-6)(x+y+2)$
14. $(x^2+2x+15)(x+3)(x-1)$
15. $(y-a+b)(y-a-b)$
16. $(x+a+2)(x-a-3)$
17. $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$
18. $\left(x-\frac{2}{a}\right)(x+3a)$
19. $(x+a+2)(x-a-1)$
20. $x(x+3)(x^2-5)$

প্রশ্নমালা 3.5

1. $(4a+3)(a+2)$
2. $(7p-8)(p+1)$
3. $(7x+4)(5x-3)$
4. $(5x-3y)(3x+7y)$
5. $(x-1)(ax+bx-a+b)$
6. $(x+ay+y)(ax-x+y)$
7. $(7x-2)(x+3)$
8. $(p-6)(6p+25)$
9. $2(6x^2+10x+1)(12x^2+20x+9)$
10. $(x+y)(ax-mx+my-xy)$
11. $\frac{1}{2}(p-2)(p-4)$
12. $(y+3)(3y+2)$
13. $(x+2)(4x-3)$
14. $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$
15. $(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$

প্রশ্নমালা 3.6

1. $(a+1)(a-5)(a+4)$
2. $(x+1)(x+2)(x+3)$
3. $(a-b)(a^2-2ab-2b^2)$
4. $(x+3)(x^2-3x+12)$
5. $(a-1)^2(a^2+2a+3)$
6. $(2a-1)(a^2-a+1)$
7. $(x-2)(x^2-x+2)$
8. $x(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
9. $(x+3y)(x+y)(x+2y)$
10. $(3+x)(2+x)(2-x)$
11. $(x-2)(2x+1)(x^2+1)$
12. $(a+1)(3a^2-3a+5)$

প্রশ্নমালা 3.7

1. $x+1$
2. 1
3. $a+b+c$
4. $x-5$
5. $(x+2)(x+1)(x-1)$
6. x^6-1
7. $ax(x^2-a^2)(x^2-c^2)$
8. $(x-3)(x^2+2x+3)(x^2+x+1)$
9. $36(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$
10. $x^2(x-2)(x+2)(x+4)$

প্রশ্নমালা 3.8

1. 49 টাকা 2. $C\left(1+\frac{r}{100}\right)$ টাকা 3. $\frac{100p}{100+x}$ টাকা 4. 25 টাকা

5. 7649089 6. 3·81 টাকা 7. 625 টাকা 8. 625 টাকা 9. $\frac{1400}{100+x}$ টাকা

10. 450 টাকা 11. $\frac{n(100-r)}{100+s}$ টি

12. $\frac{12(100-x)}{100+11x}$ টি 13. 60 ঘণ্টা

14. $\frac{pq(r+S)}{r(p+q)}$ মিনিট 15. $\frac{2}{3}(p+r)$ দিন

16. $\frac{mn}{n-m}$ দিনে 17. $x\left(1+\frac{y}{100}\right)$ টাকা 18. $\frac{100y}{100+y}$

19. আশিকের গতিবেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{t_1+t_2}$ কি. মি., রাজীবের গতিবেগ ঘণ্টায় $\frac{dt_2}{(t_1+t_2)t_1}$ কি.মি.

20. $\left\{\frac{px}{100+x}\right\}$ টাকা; 300 টাকা 21. বিল 510·72 টাকা, ভ্যাট 66·62 টাকা

22. 50 জন, 48 টাকা

23. নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)$ কি. মি., স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$ কি. মি

প্রশ্নমালা 4.1

1. $\frac{ab}{a+b}$ 2. 1 3. 1 4. 1 5. (i) $\pi^{\frac{3}{2}}$ (ii) 1 (iii) 2^n+1 6. 4 7. 4

8. $\frac{1}{50}$ 9. $\frac{1}{9}$

প্রশ্নমালা 4.2

1. (i) 4 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{1}{3}$ (vii) $\frac{5}{6}$

2. (i) 100 (ii) 0·01 (iii) 125 (iv) 25 (v) 5 (vi) 3

প্রশ্নমালা 4.3

6. (i) log 2 (ii) 2 log 5 (iii) log 2 (iv) $\frac{3}{2}$ (v) 0

প্রশ্নমালা 4.4

1. $7{\cdot}35\times10^{2}$ 2. $1{\cdot}76\times10^{-2}$ 3. $8{\cdot}3\times10^{2}$ 4. $2{\cdot}45\times10^{-2}$

5. $5{\cdot}12\times10^{-6}$ 6. $6{\cdot}37\times10^{11}$ 7. $1{\cdot}05\times10^{8}$ কি. মি. 8. $4{\cdot}5\times10^{9}$ কি. মি.

9. 1000 10. 0·000001 11. 12300

12. 0·09873 13. 0·000000132 14. 0·00000003356

প্রশ্নমালা 4.5

1. (i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0 (v) $\bar{2}$ (vi) $\bar{4}$. 2. (i) 2·51054
(ii) 0·96708 (iii) $\bar{2}$·63468 3. (i) 3·0697 (ii) 346·74 (iii) 0·039902

4. (i) 36·7921 (ii) 83·366 (iii) 401·458 5. (i) 1·6558 (ii) 1·3817

6. 481·13 টাকা (প্রায়) 7. 14·2 বছর (প্রায়) 8. 200 মিটার 9. (i) – 4
(ii) 2·52 (প্রায়) 10. (i) 0·7781 (ii) 1·3221 (iii) 1·6231

প্রশ্নমালা 5.1

1. $a^2 : b^2$ 2. $\sqrt{\pi} : 2$ বা, $\sqrt{22} : 2\sqrt{7}$ 3. 45, 60 4. 1 : 2 5. 1 : 1·4 6. 20%

7. 18 : 25 8. পিতার বয়স 35 বছর, পুত্রের বয়স 10 বছর 9. $(t_1 + t_2) : t_1$

10. $\left(\frac{p}{s} + 1\right) r$ মিটার 12. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{2ab}{b^2+1}$ (iii) $0, \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$ (iv) b

23. $\frac{4a}{a^2+4}$ 29. (i) 10 (ii) $\frac{b}{2a}\left(c + \frac{1}{c}\right)$ (iii) $\frac{1}{2}$, 2.

প্রশ্নমালা 5.2

1. আজিজ 300 টাকা, আবেদ 240 টাকা, আশিক 320 টাকা

2. ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা, ঘ 80 টাকা

3. 200, 240, 250 4. বুলবুল 81 রান, নান্নু 54 রান, আকরাম 36 রান।

5. কর্মকর্তা 8000 টাকা, করণিক 4000 টাকা, পিওন 2000 টাকা

6. 7200 টাকা 7. 70 8. 20% 9. 50% টাকা 10. 21% 11. 24%

12. 70% 13. 53·2 কুইন্টাল 14. 8 : 9 15. 70% 16. 1176 বর্গমিটার

17. 13 : 12 18. 4·5 সে. মি., 6 সে. মি., 7·5 সে. মি.

19. 210 টাকা, 224 টাকা এবং 240 টাকা 20. 120

প্রশ্নমালা 6.1

1. 4 2. ab 3. $-\frac{5}{2}$ 4. $\frac{7}{2}$ 5. $2(1+\sqrt{3})$

6. $\sqrt{5}$ 7. 6 8. a + b 9. $\frac{a+b}{2}$ 10. $-\frac{3}{5}$

11. $\{-a\}$ 12. $\left\{\frac{a+b}{2}\right\}$ 13. $\{-(a^2+b^2+c^2)\}$ 14. $\varnothing$ 15. $\{2\}$

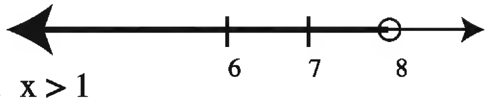
16. $\{3\}$ 17. $\left\{\frac{p+q}{2}\right\}$ 18. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ 19. $\varnothing$ 20. $\varnothing$

প্রশ্নমালা 6.2

1. 60, 40 2. 5 3. $\frac{3}{4}$ 4. 9 5. 50° 7. 72 8. পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100টি, দশ পয়সার মুদ্রা 20 টি 9. 120 কি. মি. 10. 60 11. 100 12. 3200 টাকা।

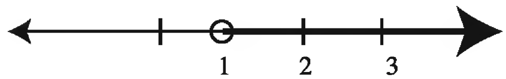
প্রশ্নমালা 6.3

1. $y < 8$



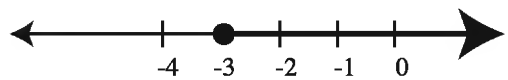
2. $x < 4$

3. $x > 1$

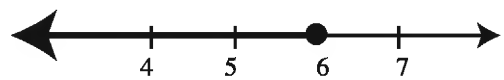


4. $z \le 6$

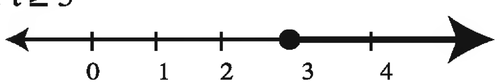
5. $x \ge -3$



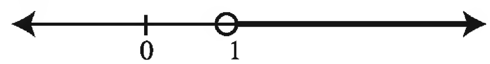
6. $x \le 6$



7. $t \ge 3$



8. $x > 1$



প্রশ্নমালা 6.4

1. $3x + \frac{x+2}{2} < 29, 0 < x < 8$
2. $4x + x - 3 \le 40, 0 < x \le \frac{43}{5}$
3. $30x + 20x < 500, 0 < x < 10$
4. $\frac{x + x + 120}{9} \le 100;\ 0 < x \le 390$
5. $5x < 40, 5 < x < 8$
6. পিতার বয়স ≤ 42 বছর
7. নাদিরার বর্তমান বয়স x বছর হলে, $14 < x < 17$
8. সময় t সেকেন্ড হলে, $t \ge 50$
9. উড্ডয়নের সময় t ঘণ্টা হলে, $t \ge 6\frac{1}{4}$
10. উড্ডয়নের সময় t হলে, $t \ge 5$ ঘণ্টা
11. সংখ্যাটি x হলে, $0 < x < 5$

প্রশ্নমালা 6.5

1. $\{-1, -2\}$ 2. $\{-3, \sqrt{5}\}$ 3. $\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$ 4. $\left\{-6, \frac{3}{2}\right\}$ 5. $\{1, 10\}$
6. $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right\}$ 7. $\left\{-\frac{3}{20}, 1\right\}$ 8. $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$. 9. $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$ 10. $\{0, a+b\}$
11. $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ 12. $\{7, -7\}$ 13. $\{\sqrt{ab}, -\sqrt{ab}\}$ 14. $\{1, -1\}$ 15. $\{-a, -b\}$
16. $\{3a, 2a\}$ 17. $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ 18. $\{1\}$ 19. $\{1, 4\}$ 20. $\{0, 4a\}$

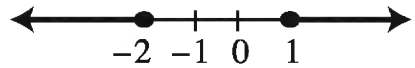
প্রশ্নমালা 6.6

1. 56 মিটার 2. 9 3. $\frac{11}{13}$ 4. 16 মিটার 5. 27 মিটার 6. 5 মিটার 7. 20
8. 84 বা 48 9. 15 10. দৈর্ঘ্য 21 মিটার, প্রস্থ11 মিটার 11. 30 বর্গ সে. মি. 12. 17
13. 16 সে. মি. 14. 17 বা 70 15. 70

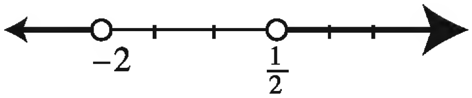
প্রশ্নমালা 6.7

1. $\{ x \in R : x > 3$ অথবা $x < 2 \}$

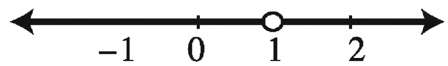
2. $\{ x \in R : x \geq 1$ অথবা $x \leq -2 \}$



3. $\{ x \in R : x > \frac{1}{2}$ অথবা $x < -2 \}$



4. $x \in R : x \neq 1$ অর্থাৎ, 1 বাদে x এর মান যেকোনো সংখ্যা।



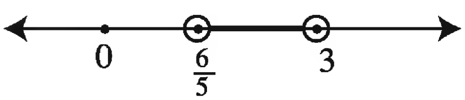
5. $\{ x \in R : x > 7$ অথবা $x < -1 \}$

6. $\{ x \in R : x > 5$ অথবা $x < -3 \}$

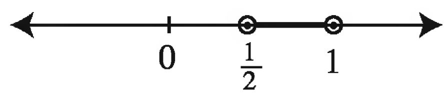
7. $\{ x \in R : x < 3$ অথবা $x > 5 \}$

8. $\{ x \in R : 1 \leq x \leq 8 \}$

9. $\{ x \in R : \frac{6}{5} < x < 3 \}$



10. $\{ x \in R : \frac{1}{2} < x < 1 \}$



প্রশ্নমালা 6.8

1. 1, 10 2. 18, 20 3. 25, 26 4. 2, 7 5. $\{ 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

প্রশ্নমালা 7.1

1. $\{(5,4), (6, 4), (6, 5)\}$ 2. $\{(3, 5), (4, 5)\}$

প্রশ্নমালা 7.2

1. $10, -15, \frac{145}{27}$ 2. 2 অথবা 3 3. 2 4. 22 5. 3x

প্রশ্নমালা 7.3

1. নিজে কর, 2. নিজে কর, 3. 13 একক 4. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ 5. নিজে কর,
6. নিজে কর, 7. নিজে কর, 8. নিজে কর, 9. লেখচিত্র আঁক; $\sqrt{41}$ একক।

প্রশ্নমালা 7.4

1. 14 2. $27x^2 - 4y^3 = 0$ 6. $22t^2 - 15rt + 2 = 0$

7. $6\sqrt{2}$ মিটার 8. 53·9 মিটার।

প্রশ্নমালা 8.1

1. (i) অসঙ্গাতিপূর্ণ, সমাধান নেই (ii) সঙ্গাতিপূর্ণ; অসংখ্য সমাধান
(iii) সঙ্গাতিপূর্ণ; সমাধান অনন্য।
2. (i) অসংখ্য সমাধান, (ii) সমাধান অনন্য (iii) সমাধান নেই
(iv) সমাধান অনন্য (v) সমাধান অনন্য।

প্রশ্নমালা 8.2

1. (3, 2) 2. (4, –1) 3. (1, 2) 4. (2, 6) 5. $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 6. (2, 3) 7. (16, 4)
8. (a + b, b – a) 9. (a + b, b – a) 10. (a, b) 11. (1, 1) 12. (12, 4)

প্রশ্নমালা 8.3

1. (2, 1) 2. (1, 5) 3. (4, –1) 4. (12, 6) 5. $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$ 6. (6, 2)
7. $\left(\frac{1}{4}, 6\right)$ 8. (2, 1) 9. (2, 3) 10. $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$
11. $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{-ab}{a+b}\right)$ 12. $\left(\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, \frac{c(c-a)}{b(b-a)}\right)$

প্রশ্নমালা 8.4

1. $\left(-8\frac{1}{2}, 4\right)$ 2. (3, 2) 3. (2, 3) 4. (1, 2) 5. (c, a) 6. (a, b)
7. (a, b) 8. (5, 4) 9. (2, 4) 10. (4, 5)

[প্রত্যেক ক্ষেত্রে শুদ্ধি পরীক্ষা নিজে কর]

প্রশ্নমালা 8.5

1. (2, 3) 2. (–7, 3) 3. (4, 5) 4. (a + b, b – a) 5. (1, –1) 6. (a, b)
7. (2, 3) 8. (a^2, b^2) 9. $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$ 10. (0, 2b) 11. (a, b)
12. $\left(\frac{b-c}{a-b}, \frac{c-a}{a-b}\right)$ 13. (a, b) 14. (a^2, b^2)

প্রশ্নমালা 8.6

1. (2, 1) 2. (1, 1) 3. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 4. (3·5, 2·5) 5. সমাধান নেই
6. সমাধান নেই 7. (2·2, 1·4)

প্রশ্নমালা 8.7

1. $\frac{15}{26}$ 2. $\frac{5}{7}$ 3. 51 4. 54 5. 73 বা 37 6. 27

7. পিতার বয়স 32 বছর, পুত্রের বয়স 11 বছর। 8. 50 বছর 9. $y = 42$ এবং 10 বছর
10. $x = 3, y = 4$ 11. ঘণ্টায় 5 কি. মি. 12. 5 13. দৈর্ঘ্য 17 মিটার, প্রস্থ 9 মিটার
14. দৈর্ঘ্য 25 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার 15. $x = 10, y = 70$ 16. $x = 20, y = 40$
18. 3000 টাকা, 125 টাকা 19. 30 মি. লি. , 70 মি. লি.।

প্রশ্নমালা 8.8

[সমাধান (x, y) বিবেচ্য]

1. $(4, -3), (0, -5)$ 2. $(1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 3. $(-5, 6), (6, -5), (5, -6), (-6, 5)$
4. $(7, 6), (6, 7), (-6, -7), (-7, -6)$ 5. $\left(\frac{1}{2}, 6\right), (3, 1)$ 6. $(7, -2)$
7. $(10, 1)$ 8. $(2, 8), (8, 2)$ 9. $(3, 1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{25}{3}\right)$ 10. $(4, -1), (-1, 4)$
11. $(1, -2), (2, -1), (-1, 2), (-2, 1)$ 12. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$

প্রশ্নমালা 8.9

1. 16 মিটার, 15 মিটার 2. 13, 9 3. 5 4. 19 5. দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 4 মিটার অথবা দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ $1\frac{1}{2}$ মিটার 6. দৈর্ঘ্য 25 মিটার, প্রস্থ 24 মিটার 7. দৈর্ঘ্য 8 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার 8. 36 9. $8\sqrt{3}$ মিটার 10. দৈর্ঘ্য 20 মিটার, প্রস্থ 15 মিটার।

প্রশ্নমালা 9.1

1. 127 2. $m^2 + mn + n^2$ 3. 4950 4. n^2 5. 320 6. 42 7. 1771
8. $2 + 4 + 6 + ...$ 10. 18 11. 11,500 টাকা , 5,83,940 টাকা।

প্রশ্নমালা 9.2

2. 20 3. $\frac{1}{2}$ 4. 9ম পদ 5. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 6. $x = 15, y = 45$ 7. $1\frac{127}{128}$ 8. 86
9. 1 10. $55\log 2$ 11. 762 12. 7 13. 21 মিলিমিটার।

লগ সারণী

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	85	127	170	212	254	297	339	381
											40	81	121	162	202	242	283	353	364
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	60644	06819	07188	07555	37	77	116	154	193	232	270	309	348
											37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	36	17	106	142	177	213	248	204	319
											34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	33	66	98	131	164	197	229	262	295
											32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	61	91	122	152	183	213	245	274
											29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	57	85	114	142	171	199	228	256
											28	55	83	110	138	163	193	221	248
16	20412	20683	20951	21219	21484	24304	24551	24797	25042	25285	27	53	80	107	134	160	176	201	227
											26	52	78	104	130	156	171	195	220
17	23045	23300	23553	23805	24055	21748	22011	22272	22531	22789	26	50	76	101	126	151	176	201	227
											25	49	73	98	122	147	171	195	220
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	24	48	71	95	119	143	167	190	214
											23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27876	28103	28330	28556	28780	23903	29226	29447	29667	29885	23	45	68	90	113	135	158	180	203
											22	44	66	88	110	132	154	176	198

20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33645	33846	33044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45488	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	110	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	93	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59105	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	12	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60513	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	57	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63649	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	63933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	64	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	65887	66181	10	19	24	38	48	57	67	76	88
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	24	37	47	56	63	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

২০১০
শিক্ষাবর্ষ

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন কর

– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

জ্ঞান মানুষের অন্তরকে আলোকিত করে

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা বাংলাদেশ

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য